МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Неравенства типа Колмогорова на полуоси и родственные задачи. Частные случаи.

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки
механико-математического факультета
Овчинникова Романа Игоревича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ________________ В.Г. Тимофеев
подпись, дата

Заведующий кафедрой
зав. кафедрой к.ф.-м.н., доцент ________________ Е.В.Разумовская
подпись, дата

Саратов 2026

Введение. В современном математическом анализе и теории приближений значительное внимание уделяется задачам, связанным с операторами дифференцирования и их аппроксимацией. Настоящая бакалаврская работа посвящена задаче оптимального приближения неограниченных линейных операторов, в частности операторов дифференцирования D^k $(k = 1, 2)$, ограниченными линейными операторами на пространстве $C(I)$, где $I = [0, +\infty)$.

Постановка задач в данном направлении восходит к работам С. Б. Стечкина, который сконструировал ключевые методы оценки наилучшего приближения, а также к классическим неравенствам Э. Ландау, Ж. Адамара и А. Н. Колмогорова. Существенный вклад в исследование экстремальных функций на полуоси принадлежит А. П. Маторину. Систематическое развитие общей теории наилучшего восстановления операторов принадлежит В. В. Арестову, В. Н. Габушину, Ш. Мичелли и Т. Ривлину.

Основной объект исследования — оператор дифференцирования D^k на классе $K_3 = \{x \in W^3_\infty(I) \mid \|x^{(3)}\|_{L^\infty} \le 1\}$ в пространстве $C(I)$. Работа посвящена решению трёх взаимосвязанных задач:

1. точные неравенства между нормами производных на полуоси (тип Ландау–Колмогорова–Маторина);
2. наилучшее приближение оператора дифференцирования ограниченными операторами (задача Стечкина);
3. наилучшее восстановление значений производной по приближённым данным (равномерная регуляризация, задача Арестова).

Основное содержание работы

Введём необходимые определения и сформулируем основные результаты.

Определение: Пространство Соболева $W^n_\infty(I)$ состоит из функций $x \in C(I)$, у которых производная $x^{(n-1)}$ абсолютно непрерывна и $x^{(n)} \in L_\infty(I)$.

Определение: Классом корректности K_n называется единичный шар по старшей производной:

$$K_n = \left\{x \in W^n_\infty(I) \;\middle|\; \|x^{(n)}\|_{L_\infty} \le 1\right\}.$$

Определение [Задача Стечкина]: Величина наилучшего приближения оператора D^k на классе K_n множеством линейных ограниченных операторов с нормой $\le N$ определяется как

$$E_N(D^k; K_n) = \inf_{\|S\|\le N} \sup_{x\in K_n} \|x^{(k)} - Sx\|_{C(I)}.$$

Определение: Модулем непрерывности оператора D^k на классе K_n называется функция

$$\Phi(M) = \sup\big\{\|x^{(k)}\|_{C(I)} : x \in K_n,\ \|x\|_{C(I)} \le M\big\}, \quad M > 0.$$

Неравенства Маторина и экстремальные функции: Рассматривается неравенство между нормами производных на полупрямой $I = ([)0, +\infty)$. Для произвольной функции $f \in W^n_\infty(I)$ обозначим $\mu_k(f) = \sup_{x\in I} |f^{(k)}(x)|$.

Теорема [Маторин]: Для любой функции $f \in W^n_\infty(I)$ справедливо неравенство

$$\mu_k(f) \le P_{n,k}\, \mu_0(f)^{(n-k)/n}\, \mu_n(f)^{k/n},$$

где константа $P_{n,k}$ выражается явно через значения полинома Чебышева T_n и его производных в точке $x = 1$.

Полином Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ является экстремальной функцией для данного неравенства на отрезке $[-1, 1]$. Для перехода к полуоси используются два метода продолжения.

Случай $n = 2$, $k = 1$. Константа $P_{2,1} = 2$, неравенство принимает вид $\mu_1(f) \le 2\, \mu_0(f)^{1/2} \mu_2(f)^{1/2}$. Экстремальная функция на полуоси строится сдвигами параболы $T_2(x) = 2x^2 - 1$:

$$f_2(x) = (-1)^i \big(2(x - i\sqrt{2})^2 - 1\big), \quad x \in \left[\tfrac{2i-1}{\sqrt{2}}, \tfrac{2i+1}{\sqrt{2}}\right], \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Случай $n = 3$. Константы

$$P_{3,1} = \frac{3\sqrt[3]{9}}{2}, \qquad P_{3,2} = 2\sqrt[3]{3}.$$

Для полинома $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ описаны два явных продолжения на $[0, +\infty)$: по корням T_3 и по экстремумам T_3.

$$f_1(x) = \begin{cases} T_3(x), & x \in \left[-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \\ T_3(x - \sqrt{3}), & x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right], \\ T_3(x - 2\sqrt{3}), & x \in \left[\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2}\right], \\ \ldots \end{cases} \tag{1}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} T_3(x), & x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right], \\ -T_3(x - 1), & x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right], \\ T_3(x - 2), & x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right], \\ \ldots \end{cases} \tag{2}$$

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определённые формулами (1) и (2), удовлетворяют условиям гладкого продолжения и являются экстремальными.

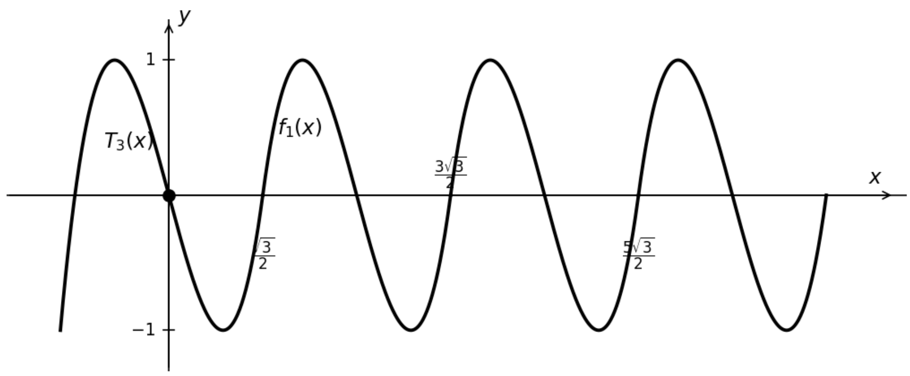

Рисунок 1 — График $f_1(x)$.

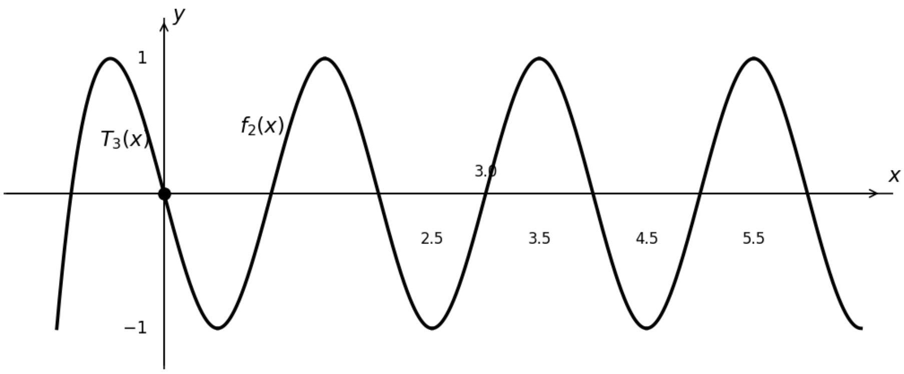

Рисунок 2 — График $f_2(x)$.

Общая схема Арестова

Задача наилучшего восстановления вложена в общую теорию Арестова. Ключевым инструментом является следующее неравенство.

Теорема [Стечкин, Арестов]: Пусть A — однородный оператор, Q — уравновешенное выпуклое множество, $\omega(\delta) = \sup\{\|Ax\| : x \in Q,\ \|x\| \leq \delta\}$. Тогда

$$\omega(\delta) \ \leq \ v_\delta(\mathcal{O}) \ \leq \ v_\delta(\mathcal{B}) \ \leq \ l(\delta) = \inf_{N>0}\bigl\{E_N + N\delta\bigr\},$$

где v_δ — точность наилучшего восстановления по приближённым данным.

Равенство $\omega(\delta) = l(\delta)$ достигается тогда и только тогда, когда функция $\Phi(M)$ является степенной, что имеет место в нашей задаче.

Вычисление модуля непрерывности $\Phi(M)$ для $n = 3$

Экстремальная функция задачи имеет структуру идеального сплайна: $x_0^{(3)}(t) = \pm 1$ п.в. (принцип Понтрягина). На $[0, 3h]$ сплайн состоит из трёх кубических кусков, при $t \geq 3h$ функция постоянна. Начальные условия однозначно определяются из требования $x_0'(3h) = x_0''(3h) = 0$:

$$c_2 = -h, \quad c_1 = \tfrac{3h^2}{2}, \quad c_0 = \pm M.$$

Случай $k = 1$.

Максимум первой производной: $\|x_0'\|_\infty = \frac{3h^2}{2}$. Связь нормы и параметра: $\|x_0\|_\infty = \frac{h^3}{2} = M$, откуда $h = (2M)^{1/3}$. Итоговая формула:

$$\Phi(M;\, D^1;\, K_3)_{C[0,+\infty)} = \frac{3}{2^{1/3}}\, M^{2/3} = 3\left(\frac{M}{2}\right)^{2/3}.$$

Случай $k = 2$.

Максимум второй производной: $\|x_0''\|_\infty = h$. Связь та же: $h = (2M)^{1/3}$. Итого:

$$\Phi(M;\, D^2;\, K_3)_{C[0,+\infty)} = 2 \cdot 3^{1/3} \cdot M^{1/3}.$$

Точные значения наилучшего приближения

Нижние оценки E_N получаются оптимизацией $\sup_{M>0}\{\Phi(M) - NM\}$ (преобразование Юнга–Фенхеля). Верхние оценки — подстановкой явных разностных операторов.

Оператор для $k = 1$:

$$S_{1,3}^*\, x(t) = \frac{1}{6h}\bigl(-8x(t) + 9x(t+h) - x(t+3h)\bigr), \quad h = \frac{3}{N}.$$

Его норма $\|S_{1,3}^*\| = 3/h = N$ и уклонение $\|x' - S_{1,3}^* x\| \le h^2/2$.

Оператор для $k = 2$:

$$S_{2,3}^*\, x(t) = \frac{1}{6h^2}\bigl(2x(t) - 3x(t+h) + x(t+3h)\bigr), \quad h = \sqrt{\frac{2}{N}}.$$

$$x_0(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{h\,t^2}{2} + \dfrac{3h^2}{2}\,t, & 0 \le t \le h, \\ -\dfrac{(t-h)^3}{6} + h^2(t-h) + \dfrac{7h^3}{6}, & h \le t \le 2h, \\ \dfrac{(t-2h)^3}{6} - \dfrac{h\,(t-2h)^2}{2} + \dfrac{h^2(t-2h)}{2} + 2h^3, & 2h \le t \le 3h, \\ x_0(3h) = \dfrac{13h^3}{6} = \mathrm{const}, & t \ge 3h. \end{cases} \tag{3}$$

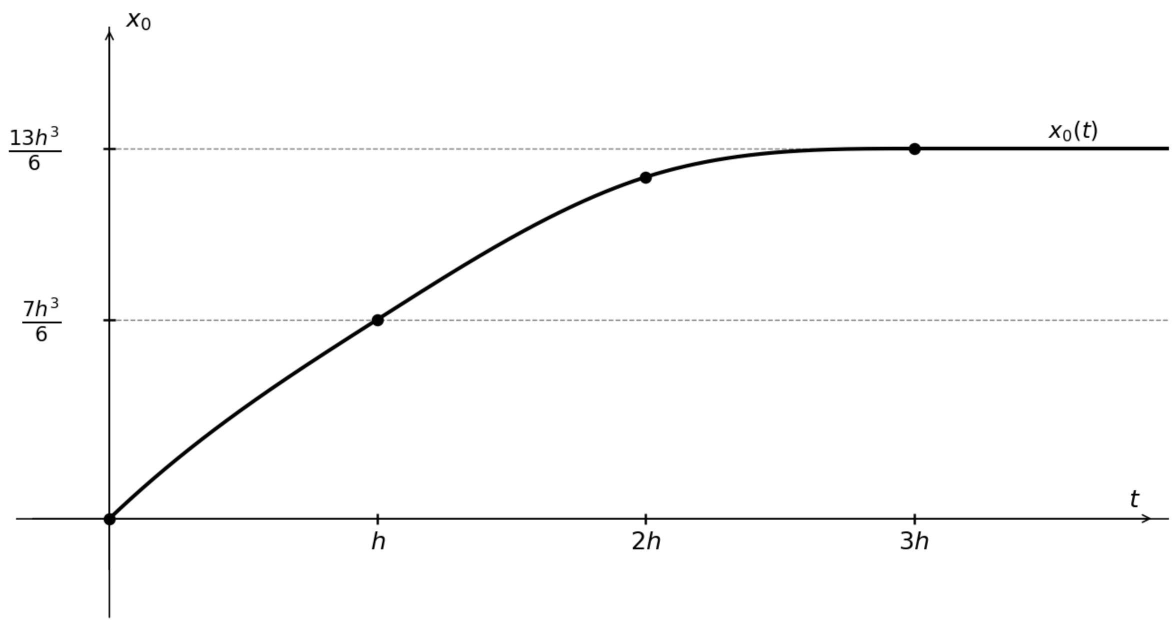

Рисунок 3 — График $x_0(t)$

Теорема [Стечкин, Габушин]: Для $n = 3$ на полуоси $I = [0, +\infty)$ справедливы точные равенства:

$$E_N(D;\, K_3)_{C[0,+\infty)} = \frac{9}{2}\, N^{-2},$$

$$E_N(D^2;\, K_3)_{C[0,+\infty)} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\, N^{-1/2}.$$

Степенная зависимость $E_N \sim N^{-(n-k)/k}$ вытекает из инвариантности класса K_n относительно масштабного преобразования $x(t) \mapsto r^{-n} x(rt)$.

Пространство обобщённых функций

Значение $x^{(k)}(t_0)$ можно записать через дельта-функцию: $x^{(k)}(t_0) = \langle x,\, (-1)^k \delta_{t_0}^{(k)} \rangle$. Задача максимизации $|x^{(k)}(t_0)|$ является задачей линейного программирования в бесконечномерном пространстве, к которой применима двойственность Фенхеля:

$$\omega(\delta) = \inf_{N>0} \bigl\{ e(N) + N\delta \bigr\}, \qquad e(N) = \sup_{\delta>0} \bigl\{ \omega(\delta) - N\delta \bigr\}.$$

Наилучший оператор S^* записывается в виде свёртки $S^* x(t) = \langle x, \mu_t \rangle$, где μ_t — дискретная мера. Для $k = 1$, $n = 3$:

$$\mu_t = \frac{1}{6h}\big(-8\delta_t + 9\delta_{t+h} - \delta_{t+3h}\big), \quad \|\mu_t\|_{\mathrm{TV}} = \frac{3}{h}.$$

На полуоси при интегрировании по частям возникают граничные члены в $t = 0$, что увеличивает константы по сравнению с симметричной осью $\mathbb{R}$:

$$C_{3,1}^{[0,+\infty)} = \sqrt{\tfrac{17}{3}}, \qquad C_{3,1}^{\mathbb{R}} = \frac{3}{2^{2/3}} \quad \text{(классический результат Колмогорова).}$$

Теорема [Колмогоров]: Для любой функции $x \in W_\infty^n(\mathbb{R})$ и $k = 1, \ldots, n-1$:

$$\|x^{(k)}\|_{C(\mathbb{R})} \le K_{k,n} \, \|x\|_{C(\mathbb{R})}^{1-k/n} \cdot \|x^{(n)}\|_{C(\mathbb{R})}^{k/n}.$$

Модуль непрерывности и константа наилучшего приближения связаны общей формулой: если $\Phi(M) = C \cdot M^{\alpha/(1+\alpha)}$ с $\alpha = (n-k)/k$, то

$$E_N(D^k;\, K_n) = \frac{\alpha^\alpha}{(1+\alpha)^{1+\alpha}} \cdot C^{1+\alpha} \cdot N^{-\alpha}.$$

Для полуоси точные константы в неравенствах Колмогорова:

$$K_{1,3}^{[0,+\infty)} = \sqrt[3]{9} \approx 2{,}080.$$

Заключение. В настоящей работе были изучены неравенства типа Колмогорова для $n = 3$, $k = 1, 2$ на полуоси $[0, \infty)$ из пространства $C(I)$, а также родственные задачи получения оценки наилучшего приближения оператора дифференцирования и равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора дифференцирования. Получены следующие основные результаты.

1. Неравенства Маторина и экстремальные функции.

Изложены результаты А. П. Маторина о неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и её производных на полупрямой. Показано, что экстремальными функциями являются сдвинутые и масштабированные полиномы Чебышева, и описаны различные способы их продолжения с отрезка $[-1,1]$ на всю полуось. Для частных случаев $n=2$ и $n=3$ построены явные экстремальные функции и приведены их графики.

2. Общая схема Арестова.

Задача наилучшего восстановления оператора D^k вложена в общую теорию, в которой ключевую роль играют чебышевский радиус, константа Юнга пространства Y и двойственность Фенхеля между модулем непрерывности $\omega(\delta)$ и величиной $E(N)$ задачи Стечкина.

3. Метод Стечкина.

Нижние оценки E_N получены через модуль непрерывности $\Phi(M)$ с помощью преобразования Юнга–Фенхеля. Верхние оценки достигнуты конструкцией явных разностных операторов. Совпадение верхних и нижних оценок подтверждает точность полученных значений. Подробно построены экстремальные кусочно-кубические сплайны на полуоси.

$$x_0(t)=\begin{cases}\dfrac{t^3}{6}-\dfrac{h\,t^2}{2}+\dfrac{3h^2}{2}\,t, & 0\le t\le h,\\ -\dfrac{(t-h)^3}{6}+h^2(t-h)+\dfrac{7h^3}{6}, & h\le t\le 2h,\\ \dfrac{(t-2h)^3}{6}-\dfrac{h\,(t-2h)^2}{2}+\dfrac{h^2(t-2h)}{2}+2h^3, & 2h\le t\le 3h,\\ x_0(3h)=\dfrac{13h^3}{6}=\text{const}, & t\ge 3h.\end{cases} \tag{4}$$

4. Метод обобщённых функций.

Двойственная формулировка задачи через дельта-функцию и её производные раскрывает структуру экстремальных элементов (идеальных сплайнов с $x'''=\pm1$) и объясняет происхождение разностных операторов как оптимальных дискретных аппроксимаций $\delta^{(k)}$. Предложено альтернативное решение задачи нахождения экстремальной функции.

$$
f^*(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{h^*}{2}x^2 + C_1\,x + C_0, & x \in [0, h^*), \\ \dfrac{1}{6}(x-h^*)^3 - \dfrac{h^*}{2}(x-h^*)^2 + \dfrac{h^{*2}}{2}(x-h^*) + f^*(h^*), & x \in [h^*, 3h^*), \\ f^*(3h^*), & x \in [3h^*, \infty), \end{cases} \tag{5}
$$

5. Точные значения:

Получены оценки сверху и снизу величины наилучшего приближения оператора дифференцирования на центрально-симметричном и выпуклом множестве

$$
E_N(D; K_3)_{C[0,\infty)} = \frac{9}{2}\,N^{-2}, \qquad E_N(D^2; K_3)_{C[0,\infty)} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,N^{-1/2}.
$$

6. Связь с неравенствами Колмогорова.

Модуль непрерывности оператора дифференцирования на классе K_n определяется наименьшей константой в неравенстве Ландау–Колмогорова, и двойственность Фенхеля полностью описывает взаимосвязь между задачей Стечкина и этими неравенствами. Результаты Маторина дают явное описание экстремальных функций, реализующих равенство в неравенствах Колмогорова на полуоси. Результаты работы могут служить теоретической основой для построения устойчивых методов численного дифференцирования и оценки их погрешностей.