

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Математического анализа

Многочлены Бернштейна и их модификации

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Молчанова Данилы Александровича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н.

Ю.В. Матвеева

Заведующий кафедрой
зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент

Е.В. Разумовская

Саратов 2026

Введение. Многочлены Бернштейна, введённые Сергеем Натановичем Бернштейном в начале XX века, занимают особое место в теории приближений и математическом анализе. Они служат конструктивным доказательством теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций многочленами и находят широкое применение в различных областях — от компьютерной графики и моделирования кривых (например, в сплайнах Безье) до численных методов и теории вероятностей.

Интерес к многочленам Бернштейна сохраняется и в современной науке: их модификации позволяют улучшить скорость сходимости, адаптировать приближения к специфическим классам функций и решать задачи с дополнительными ограничениями. Это делает тему исследования актуальной как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Основная часть.

Определение 1.1. При натуральном n алгебраический полином

$$B(x) = \sum_{k=0}^n y_k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

называется полиномом в форме Бернштейна или просто полиномом Бернштейна.

$$B(0) = y_0, \quad B(1) = y_n.$$

Базисные полиномы $p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ обладают следующими свойствами:

$$p_{nk}(x) > 0 \text{ при } x \in (0, 1) \text{ и всех } k = 0, 1, \dots, n;$$

$$\sum_{k=0}^n p_{nk}(x) \equiv 1.$$

Лемма 1.1. При всех вещественных x справедливо равенство

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k p_{nk}(x) = x.$$

Теорема 1.1. Справедлива формула

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k^{(0)} p_{n-1,k}(x),$$

где $y_k^{(1)} = (1-x)y_k^{(0)} + xy_{k+1}^{(0)}$.

Таким образом, выведено рекуррентное соотношение

$$y_k^{(i)} = (1-x)y_k^{(i-1)} + xy_{k+1}^{(i-1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, n-i;$$

$$y_k^{(0)} = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

которое позволяет вычислить значение $B(x) = y_0^{(n)}$ в фиксированной точке $x \in (0, 1)$.

Лемма 1.2. Полином Бернштейна допускает представление

$$B(x) = \sum_{i=0}^n (\Delta^i y_0) C_n^i x^i,$$

где $\Delta^i y_0 = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} C_i^k y_k$ — нисходящая конечная разность i -го порядка.

Теорема 1.2. Функция $S(x)$ будет r раз непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-1, 1]$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$C_m^i \nabla^i y_0 = C_n^i \Delta^i y_0 \quad \text{при } i = 1, \dots, r.$$

При $m = n$ условие принимает вид

$$\nabla^i y_0 = \Delta^i y_0 \quad \text{при } i = 1, \dots, r.$$

Теорема 1.3. Полином можно представить в виде

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \hat{y}_k C_{n+1}^k x^k (1-x)^{n+1-k},$$

где $\hat{y}_0 = y_0$, $\hat{y}_{n+1} = y_n$ и

$$\hat{y}_k = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) y_k + \frac{k}{n+1} y_{k-1}, \quad k \in 1 : n.$$

Лемма 1.4. При $n \geq 2$ справедлива формула

$$B'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^{(1)} p_{n-1,k}(x),$$

где $u_k^{(1)} = n(y_{k+1} - y_k)$.

Теорема 1.4 При $n \geq 2$ и $x \in (0, 1)$ справедливо равенство

$$B'(x) = n(y_1^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}),$$

где $y_0^{(n-1)}$ и $y_1^{(n-1)}$ вычисляются по схеме.

Теорема 2.1. Пусть $f \in C[-1, 1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f, x)$, определенными по формуле

$$B_n(f, x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) C_n^k (1-x)^k (1+x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда коэффициенты полиномов $B_n(f, x)$ в алгебраической записи

$$B_n(f, x) = \sum_{m=0}^n a_{n,m}(f) x^m, \quad n \in \mathbb{N}$$

выражаются в виде

$$a_{n,m}(f) = \frac{1}{2^n} C_n^m \sum_{k=0}^n D_{n,m}^k f\left(1 - \frac{2k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, m = 0, 1, \dots, n,$$

со значениями

$$D_{n,m}^k = \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j}.$$

Теорема 2.2. При любом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ числа $D_{n,m}^k$, определенные по формуле, обладают свойствами:

$$D_{m,m}^k = (-1)^k C_m^k, \quad k \in \{0, 1, \dots, m\},$$

$$D_{n,m}^0 = 1, \quad D_{n,m}^n = (-1)^m, \quad n \in \{m, m+1, \dots\},$$

$$D_{n,m}^{k-1} + D_{n,m}^k = D_{n+1,m}^k, \quad n \in \{m, m+1, \dots\}, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Многочленами, подобными многочленам Бернштейна, называют последовательности линейных положительных операторов вида:

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k}) p_{n,k}(x),$$

где:

- $x_{n,k}$ — узлы аппроксимации ($0 \leq x_{n,0} < x_{n,1} < \dots < x_{n,n} \leq 1$);
- $p_{n,k}(x)$ — базисные функции, образующие разбиение единицы: $\sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) = 1$.

Теорема 3.1. Многочлены, подобные многочленам Бернштейна обладают свойствами:

1. линейность и положительность (как у классических многочленов Бернштейна);
2. сохранение некоторых свойств функции (например, граничных значений);
3. сходимости к исходной функции при $n \rightarrow \infty$;
4. возможность улучшения скорости сходимости по сравнению с классическими многочленами Бернштейна.

Модификации В. С. Виденского и Т. П. Пендиной применяются к многочленам l_n , подобным многочленам Бернштейна. Получена асимптотика для центральных моментов порядка $2m$ модификаций $U_{n,2m}$ при $n \rightarrow \infty$, а также доказана теорема Вороновской–Бернштейна для операторов $l_{n,2m}$.

1. В 1985 году В. С. Виденский ввёл в рассмотрение операторы, подобные многочленам Бернштейна, а именно, для $f \in C[0, 1]$.

$$U_n(f, x) = \frac{n}{x(1-x)} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

К операторам U_n можно применить модификации В. С. Виденского и Т. П. Пендиной.

Линейные операторы $U_{n\nu}$ действуют в пространстве $C^{(\nu)}[0, 1]$.

Получена асимптотика для центральных моментов порядка $2m$ модификаций $U_{n,2m}$ при $n \rightarrow \infty$, а также доказана теорема Вороновской–Бернштейна для операторов $l_{n,2m}$.

Лемма 4.1. Для любых $x \in [0, 1]$ и $m \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m S_{2m}(U_{n,2m}, x)}{(2m)!} = (-1)^{m+1} \delta_m (x(1-x))^m,$$

где

$$\delta_m = \sum_{j=0}^m \frac{1}{2^j j!}$$

— частная сумма ряда Тейлора для $e^{\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим кратко еще 5 модификаций:

1. Модификации Кирова

Принцип: учитывают производные функции до порядка p для улучшения аппроксимации гладких функций.

Используют информацию о производных функции. Формула:

$$H_n^p(f; x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^p \frac{f^{(i)}(k/n)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^i \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Оценки точности выражаются через модуль непрерывности $\omega(f; \delta)$ функции f :

$$\omega(f; \delta) = \sup \{|f(x') - f(x'')| : |x' - x''| \leq \delta, x', x'' \in [0, 1]\}.$$

Общая оценка для непрерывной функции

Для $f \in C[0, 1]$ справедлива следующая оценка:

$$|B_n^*(f; x) - f(x)| \leq C \cdot \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где C — константа, зависящая от α и β .

2. Итерационные сплайны на основе многочленов Бернштейна

Принцип: последовательное улучшение аппроксимации через итерации.

Алгоритм построения:

1. $l_{n0}(x) = S_0(B_n^s; x)$ — начальный многочлен Бернштейна.
2. $l_{n1}(x) = S_{10}(B_n^s; x)$.
3. Для $m \geq 2$:

$$l_{nm}(x) = \frac{1}{m!} S_m(B_n^s; x) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \cdot S_k(B_n^s; x) \cdot l_{n,m-k}(x).$$

Общая оценка для непрерывной функции

Для $f \in C[0, 1]$ при любом числе итераций k справедлива оценка:

$$|S_k(f; x) - f(x)| \leq (1 + C)^k \cdot \omega \left(f; \frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

где:

- $\omega(f; \delta)$ — модуль непрерывности функции f ,
- C — константа, не зависящая от n и k .

3. Многочлены с весовыми коэффициентами

Принцип: введение весовых функций для адаптации к специфическим свойствам функции.

Формула:

$$B_n^w(f; x) = \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) w \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

где $w(x)$ — весовая функция.

Общая оценка для непрерывной функции

Для $f \in C[0, 1]$ справедлива оценка:

$$|B_n^w(f; x) - f(x)| \leq C \cdot \omega \left(f; \sqrt{\delta_n(x)} \right),$$

где:

- $\omega(f; \delta)$ — модуль непрерывности функции f ,
- $\delta_n(x) = B_n^w((t-x)^2; x)$ — второй момент оператора,
- C — константа, не зависящая от n и x .

4. Многочлены с дополнительными параметрами

Принцип: введение параметров α, β для управления сходимостью.

Формула:

$$B_n^{\alpha, \beta}(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k + \alpha}{n + \beta}\right) \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}.$$

Общая оценка для непрерывной функции

Для $f \in C[0, 1]$ справедлива оценка:

$$|B_n^{(\alpha, \beta, \gamma)}(f; x) - f(x)| \leq C(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \omega\left(f; \sqrt{\delta_n^{(\alpha, \beta, \gamma)}(x)}\right),$$

где:

- $\omega(f; \delta)$ — модуль непрерывности функции f ,
- $\delta_n^{(\alpha, \beta, \gamma)}(x) = B_n^{(\alpha, \beta, \gamma)}((t - x)^2; x)$ — второй момент оператора,
- $C(\alpha, \beta, \gamma)$ — константа, зависящая от параметров.

5. Многочлены для нескольких переменных

Обобщение на многомерный случай:

$$B_{n_1, \dots, n_d}(f; x_1, \dots, x_d) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n_d} f\left(\frac{k_1}{n_1}, \dots, \frac{k_d}{n_d}\right) \prod_{i=1}^d \binom{n_i}{k_i} x_i^{k_i} (1 - x_i)^{n_i - k_i}.$$

Применение: построение поверхностей Безье, аппроксимация функций многих переменных.

Общая оценка через модуль непрерывности

Для непрерывной функции f на $[0, 1]^d$ справедлива оценка:

$$\|f - B_n(f)\|_{\infty} \leq C_d \cdot \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где:

- $\|\cdot\|_{\infty}$ — равномерная норма;
- $\omega_f(\delta)$ — модуль непрерывности функции f ;
- C_d — константа, зависящая только от размерности d .

Теорема 4.1. Если функция $f \in C^{(2m)}[0, 1]$, $m \geq 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^m \{U_{n,2m}(f, x) - f(x)\} = (-1)^{m+1} \delta_m(x(1-x))^m f^{(2m)}(x).$$

Модификации многочленов Бернштейна

Рассмотрим модификацию Кирова для $p = 1$ (учитывает первую производную):

$$H_n^1(f; x) = \sum_{k=0}^n \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right) \left(x - \frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Модификация для $f(x) = x^2$, $p = 1$

Для $f(x) = x^2$ имеем:

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^2,$$

$$f'\left(\frac{k}{n}\right) = 2 \cdot \frac{k}{n}.$$

$$\begin{aligned} H_n^1(x^2; x) &= -\frac{1}{n^2} \left(x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \right) + \frac{2x}{n} \cdot x \\ &= -\frac{x^2}{n^2} - \frac{x(1-x)}{n^3} + \frac{2x^2}{n} \\ &= x^2 \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right) - \frac{x(1-x)}{n^3}. \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ эта модификация сходится к x^2 быстрее, чем классический многочлен Бернштейна.

Итог:

1. Для константной функции ($m = 0$) многочлен Бернштейна точно воспроизводит функцию: $B_n(1; x) = 1$. 2. Для линейной функции ($m = 1$) также точное воспроизведение: $B_n(x; x) = x$. 3. Для квадратичной функции ($m = 2$) появляется погрешность порядка $O(1/n)$: $B_n(x^2; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$. 4. Модификации Кирова позволяют улучшить аппроксимацию за счёт учёта производных функции.

Заключение. В ходе выполнения бакалаврской работы на тему «Многочлены Бернштейна и их модификации» были достигнуты поставленные цели и решены все задачи исследования. Проведённый анализ позволил всесторонне изучить свойства классических многочленов Бернштейна, а также оценить эффективность их модификаций в задачах аппроксимации функций.

Выводы:

– Многочлены Бернштейна представляют собой фундаментальный инструмент теории приближений, обладающий ценными теоретическими и практическими свойствами.

– Классические многочлены Бернштейна имеют ограничения по скорости сходимости, особенно заметные для функций высокой гладкости.

– Модификации многочленов Бернштейна позволяют существенно улучшить аппроксимационные характеристики, сохраняя при этом важные свойства линейности и положительности.

Таким образом, многочлены Бернштейна представляют собой важный и полезный инструмент для решения различных математических задач и приложений. Их изучение и применение позволяет глубже понять принципы работы математических моделей и алгоритмов, а также способствует развитию теории приближений функций и вычислительной математики.