МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИН.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

ЖИЗНЕННЫЙ ЦИКЛ ЛЕВНЕРОВСКИХ ХАЛЛОВ, СГЕНЕРИРОВАННЫХ УПРАВЛЕНИЕМ В ВИДЕ РАДИКАЛА

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса421 группы

направление 02.03.01—Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Джумарстанова Санжара Ержановича

Научный руководитель

зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ________________ Е.В.Разумовская

Заведующий кафедрой

зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ________________ Е.В.Разумовская

Саратов 2026

Введение. Центральным объектом исследования в бакалаврской работе является уравнение Левнера которое задаётся следующим образом:

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = -z\frac{\partial f_t(z)}{\partial z} \cdot \frac{\kappa(t)+z}{\kappa(t)-z}$$

с начальным условием

$$f_0(z) = z,$$

где $\lambda(t)$ — вещественная непрерывная функция, определяющая управляющую функцию $\kappa(t) = e^{i\lambda(t)}$, полученное чешским математиком Чарльзом Левнером.

Уравнение Левнера обеспечивает соответствие между определенными семействами двумерных множеств, такими как кривые на плоскости, и вещественнозначными функциями. Существует значительное количество вариантов дифференциального уравнения Левнера, которые зависят от выбранной области. Однако, в последнее время основное внимание уделяется хордовому уравнению Левнера, которое представляет собой уравнение Левнера в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ комплексной плоскости. В данной работе будет рассматриваться именно хордовое уравнение Левнера, имеющее вид:

$$\frac{dg_t}{dt} = \frac{2}{g_t - \xi(t)}$$

с начальным условием

$$g_0 = z$$

для всех $z \in \mathbb{H}$.

Целью данной бакалаврской работы является исследование жизненного цикла левнеровских халлов, сгенерированных управлением в виде радикала, и их графическое представление с помощью языка программирования Python. Для достижения данной цели были сформулированы и выполнены следующие задачи:

- изучение теории по хордовому уравнению Левнера на верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ комплексной плоскости;

- ознакомление с примерами решения уравнения Левнера, когда управляющая функция является радикалом;
- создание алгоритма построения графиков.

Работа состоит из трех частей. В первой части изложены основные сведения об хордовом уравнении Левнера. Во второй части рассматриваются случаи, когда управляющая функция является радикалом,а именно:
- когда $\xi(t) = 2[kt]^{1/2}$;
- когда $\xi(t) = 2[k(1-t)]^{1/2}$, в частности при $k < 4$, $k > 4$ и $k = 4$;
- когда управляющая функция представлена в виде радикала степени N.

В третьей части описан алгоритм построения графиков решения.

Основное содержание работы. Будем рассматривать два вида хордового уравнения Левнера: прямое и обратное.

Прямая версия хордового уравнения Левнера представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t,z) = \frac{2}{g(t,z) - \lambda(t)} \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$g(0,z) = z \tag{1.2}$$

где λ: $[0,T] \to \mathbb{R}$ - непрерывна, а область для z является верхней полуплоскостью, обозначаемой $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$. Из теоремы существования и единственности решения дифференциальных уравнений следует, что каждому $z \in \mathbb{H}$ соответствует некоторый промежуток времени $[0, t_0)$ такой, что существует единственное решение (1.1) - (1.2).

При определенных условиях на λ, мы можем утверждать, что набор всех таких точек формирует кривую, начинающуюся на числовой оси. Однако, эта кривая может вырождаться в некоторую область в зависимости от функции λ. Будем обозначать эту кривую γ. Положим $T_z = \sup\{t_0 \in [0,T] : g(t,z)$ существует на $[0,t_0)\}$. Это даст нам максимальное значение t, при котором функция $g(t,z)$ имеет смысл. Определим теперь $G_t = \{z \in \mathbb{H} : t < T_z\}$, где содержатся лишь те точки из $\mathbb{H}$, которые за некоторое время $t < T_z$ не приводят к сингулярности $\partial_t g$. Таким образом, G_t теперь является нашей областью для (1.1).

Поскольку при подстановке различных управляющих функций λ в уравнение (1.1), мы получаем различные функции $g(t,z)$, соответствующие области G_t, λ может быть названа функцией управления. Согласно теореме Римана о конформном отображении, g_t — это конформное отображение из области G_t на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$. Для определения этого отображения нам потребуется выполнить три условия, которые обеспечат его однозначность. Сформулируем эти условия:

а) ∞ отображается на ∞

б) вещественная прямая отображается на вещественную прямую

в) производная, вычисленная в точке ∞, равняется 1.

Такой набор условий известен как гидродинамическая нормировка и подразумевает, что $\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\mathbb{H}}}(g_t(z)-z)=0$. Рассматривая разложение g_t, заметим, что все коэффициенты z_n при $n \geq 2$ и константа должны быть равны нулю, аналогично коэффициент при z должен быть равен 1. Поэтому в окрестности бесконечно удаленной точки g_t имеет разложение:

$$g_t(z) = z + \frac{c(t)}{z} + O(\frac{1}{z^2})^2. \tag{1.3}$$

Функцию $c(t)$ называют мощностью полуплоскости и можно утверждать, что она непрерывно возрастает по мере изменения значения t. Выберем $c(t) = 2t$, в основе данного выбора лежит радиальная версия уравнения Левнера:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t,z) = -g(t,z)\frac{g(t,z)+\lambda(t)}{g(t,z)-\lambda(t)},\ g(0,z) = z. \tag{1.4}$$

Оболочка в верхней полуплоскости определяется как компактное множество K, содержащееся в замкнутой верхней полуплоскости $\overline{\mathbb{H}}$, такое что множество H/K является односвязным.

Говоря о втором случае хордового уравнения Левнера, мы можем представить себе следующее: мы рисуем кривую γ, которая касается действительной оси. Таким образом, мы можем сделать вывод, что если мы начнём с конечного времени T и вернёмся к моменту времени 0, то в верхней полуплоскости, которая в момент времени T была пустой, появится кривая γ. Такие функции генерируются уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(z) = \frac{-2}{f_t(z) - \xi(t)},\ \ f_0(z) = z, \tag{1.5}$$

где ξ вещественная и непрерывная. Уравнение (1.5) называется обратным уравнением Левнера. Если T — это максимально возможное значение для t, то отношение $\lambda(T-t) = \xi(t)$ позволяет нам перейти от одного уравнения к другому.

Теорема 1.1. Пусть $\gamma(t)$ параметризуется так, что $c(t) = 2t$. Тогда для всех $z \in \mathbb{H} \setminus K_t$, где K_t - оболочка, ассоциированная с $\gamma(t)$, то $g_t(z)$ удовлетворяет условию (1.1)-(1.2).

Уравнение Левнера непрерывно порождает новые особые точки g_t, которые при отображении ставят в соответствие g_t точки $\xi(t)$ в плоскости ω. Если $\xi(t)$ является достаточно гладкой функцией , то эти особые точки образуют простую кривую $z_c(t)$, где точки $z_c(t)$ удовлетворяют:

$$g_t(z_c(t)) = \xi(t). \tag{2.1}$$

Определение 2.1. $z_c(t)$ называется линией сингулярности или траекторией. Если взять $\xi(t)$ в качестве управляющей функции, соответствующей данной кривой $\gamma(t)$, то $z_c(t)$ будет совпадать с $\gamma(t)$.

Численный метод нахождения решения, порожденного заданной управляющей функцией $\xi(t)$, заключается в численном интегрировании уравнения Левнера назад от условия $g_t = \xi(t)$ для получения значения $g_0 = z_c(t)$. Точные решения уравнений (1.1) будем находить в том случае, если управляющая функция $\xi(t)$ представлена одним из уравнений:

$$\xi(t) = C(1-t)^{\beta} \tag{2.3}$$

или

$$\xi(t) = Ct^{\beta}, \tag{2.4}$$

для $\beta = 0$, $1/2$ и 1.

Из (2.3) и (2.4) возможны следующие случаи:

а) Уравнение Левнера с управляющей функцией $\xi(t) = 2[kt]^{1/2}$.

б) Уравнение Левнера с управляющей функцией $\xi(t) = 2[k(1-t)]^{1/2}$.

Рассмотрим уравнение Левнера с управлением:

$$\xi(t) = 2[kt]^{1/2}, \tag{2.5}$$

где $k \geq 0$. Запишем уравнение Левнера с такой управляющей функцией:

$$\frac{dg_t}{dt} = \frac{2}{g_t - 2[kt]^{1/2}}. \tag{2.6}$$

Выразим $g_t = Gt^{1/2}$ и подставим в (2.6):

$$\frac{d(Gt^{1/2})}{dt} = \frac{2}{Gt^{1/2} - 2[kt]^{1/2}}. \tag{2.7}$$

Получим:

$$\frac{tdG}{dt} = -\frac{G}{2} + \frac{2}{G - 2k^{1/2}}. \tag{2.10}$$

Введем ещё одну замену $\tau = \ln(t)$ и выразим $t = e^{\tau}$. Подставим в (2.10). Приводим в правой части к общему знаменателю. Раскрывая скобки в числителе правой части равенства и приравнивая его к нулю, найдем $y_{\pm} = k^{1/2} \pm (k+4)^{1/2}$. Тогда получим:

$$\frac{dG}{d\tau} = \frac{(G - y_+)(G - y_-)}{2(2k^{1/2} - G)}. \tag{2.14}$$

Сложим два корня $y_+ + y_- = k^{1/2} + (k+4)^{1/2} + k^{1/2} - (k+4)^{1/2} = 2k^{1/2}$. Умножим в (2.14) обе части на $\frac{2k^{1/2} - G}{(G-y_+)(G-y_-)}$ и заменим $2k^{1/2} = y_+ + y_-$. Разложим дробь в левой части равенства. Приведем к общему знаменателю, по методу неопределенных коэффицентов, получим $A = \frac{y_-}{y_+ - y_-}$ и $B = -\frac{y_+}{y_+ - y_-}$, тогда

$$\frac{dG}{d\tau}\left[\frac{y_-}{G - y_+} - \frac{y_+}{G - y_-}\right] = \frac{1}{2}(y_+ - y_-). \tag{2.17}$$

Из (2.17) умножая обе части на $-\frac{2}{y_+-y_-}$ следует , что

$$\frac{dG}{d\tau}\frac{1}{(y_+-y_-)}[\frac{2y_+}{G-y_-}-\frac{2y_-}{G-y_+}]=-1. \tag{2.18}$$

Но

$$\frac{1}{y_+-y_-}[\frac{2y_+}{G-y_-}-\frac{2y_-}{G-y_+}]dG=d(\frac{2y_+\ln(G-y_-)-2y_-\ln(G-y_+)}{y_+-y_-})=dH(G). \tag{2.19}$$

Тогда $\frac{dH(G)}{d\tau}=-1$, что интегрируется в

$$-H(G)=\tau+c(z)=\ln t+c(z). \tag{2.20}$$

Постоянная $c(z)$ может быть определена из случая, когда в пределе t приближается к 0. Решение для общего t становится очевидным:

$$H(\frac{g}{t^{1/2}})=2\ln(\frac{z}{t^{1/2}}). \tag{2.22}$$

Поскольку линия сингулярностей определяется условием, в котором g равно

$$z_c(t)=Bt^{1/2}, \tag{2.23}$$

где $B=e^{\frac{1}{2}H(2k^{1/2})}$.

В более явном виде коэффициент

$$B=2(\frac{(k+4)^{1/2}+k^{1/2}}{(k+4)^{1/2}-k^{1/2}})^{\frac{1}{2}\frac{k^{1/2}}{(k+4)^{1/2}}}e^{\frac{1}{2}\pi i(1-\frac{k^{1/2}}{(k+4)^{1/2}})}, \tag{2.24}$$

такой, что линия сингулярностей расположена под углом к действительной оси, которая является

$$\theta=\frac{1}{2}\pi(1-\frac{k^{1/2}}{(k+4)^{1/2}}. \tag{2.25}$$

Очевидно, что для $k=0$ линия перпендикулярна вещественной оси, в то время как по мере того, как $k\to\infty$ угол пересечения уменьшается.

Рассмотрим уравнение Левнера с управлением:

$$\xi(t) = 2[k(1-t)]^{1/2}, \tag{2.26}$$

где $t \leq 1$, $k \geq 0$.

Запишеи уравнение Левнера для данной управляющей функции:

$$\frac{dg_t}{dt} = \frac{2}{g_t - 2[k(1-t)]^{1/2}}. \tag{2.27}$$

Будем находить решение аналогичным способом, как при управляющей функции $\xi(t) = 2[kt]^{1/2}$. Проведем замену

$$G = \frac{g}{(1-t)^{1/2}}. \tag{2.28}$$

Выразим $g_t = G(1-t)^{1/2}$ и подставим в (2.27).

Проведем ещё одну замену $\tau = -\ln(1-t)$ и из неё выразим $(1-t) = -e^{\tau}$. Тогда получим:

$$\frac{dG}{d\tau} = \frac{G}{2} + \frac{2}{(G - 2k^{1/2})}. \tag{2.33}$$

И снова производная становится простой функцией от неизвестного, представляясь в виде отношения полиномов, т.е.

$$-\frac{dG}{d\tau} = \frac{(G-y_+)(G-y_-)}{2(2k^{1/2} - G)}, \tag{2.34}$$

где корни $y_{\pm} = k^{1/2} \pm (k-4)^{1/2}$. Корни действительны и положительны, когда $k \geq 4$, но они комплексные при $k < 4$. Интегрируем уравнение и получим решение:

$$H(G) = \tau + c(z), \tag{2.35}$$

где H аналогично прошлому случаю, но с разными $y_{\pm}$.

Из начального условия следует, что

$$H(\frac{g}{(1-t)^{1/2}}) = -\ln(1-t) + H(z), \tag{2.37}$$

и тогда уравнение для линии сингулярностей имеет вид:

$$H(2k^{1/2}) = -\ln(1-t) + H(z_c(t)). \tag{2.38}$$

Когда $k < 4$, действительная и мнимая части $H(z)$ равны, из чего следует, что $H(2k^{1/2})$ является положительной действительной константой. Поскольку действительная часть $H(z_c(t))$ должна обратиться в ∞ при приближении t к 1, то $z_c(1) = y_+$, поскольку другой возможный предполагаемый предел y_-, находится не в той полуплоскости.

Затем из рассуждений следует , что $ImH(z_c(t)) = 0$, траектория должна обернуться вокруг y_+ бесконечное число раз. Следовательно, линия сингулярностей закручивается по спирали в направлении точки y_+.

Для $k > 4$ действительная и мнимая части $H(z)$ равны и $H(2k^{1/2})$ аналогичным образом является положительным действительным числом. По мере приближения t к 1, $z_c(t)$ должна приближаться к точке y_- на вещественной прямой. На самом деле, из того, что возможно вычислить угол, под которым линия сингулярностей пересекает действительную часть, $ImH(z_c(t))$ должна исчезнуть.

Если обозначить через ϕ угол, под которым $z_c(t)$ попадает на действиетльную прямую, то имеем, что в пределе $t \to 1$, $Arg(z_c(t) - y_+) \to \pi$, тогда как $Arg(z_c(t) - y_-) \to \phi$. Условие $ImH(z_c(t)) = 0$ тогда дает когда t становится равным 1. Заметим, что для $k = 4$ и $k \to \infty$ имеем скользящее касание, а для $k = 9/2$ касание перпендикулярно.

Решение уравнение Левнера с управляющей функцией $\xi(t) = 2[k(1-t)]^{1/2}$ для k = 4. В этом случае два корня в уравнении одинаковы, $y_\pm = 2$.

Подстановка $z_c(t) - 2 = r_t e^{i\phi_t}$ и разделение уравнения на действительную и мнимую части приводит к выражению

$$z_c(t) = 2 + \frac{\sin 2\phi_t}{\phi_t} + 2i\frac{\sin^2\phi_t}{\phi_t}. \tag{2.52}$$

Параметр ϕ монотонно увеличивается со временем от $\phi_0 = 0$ до $\phi_1 = \pi$.

Рассмотрим случай, где управляющая функция принадлежит классу Липшица $Lip(1/N)$ с условием, что $N \in \mathbb{N}$ и $N \geq 3$.

Теорема 2.1. Пусть $f(z,t)$ является решением дифференциального уравнения:

$$\frac{df(z,t)}{dt} = \frac{2}{f(z,t) - \sqrt[N]{t}}, Imz \geq 0, N \in \mathbb{N}, N \geq 3. \tag{2.53}$$

Тогда для достаточно малых $t > 0$ $f(z,t)$ отображает область $D(t) = \mathbb{H}\ \gamma(t)$ на $\mathbb{H}$, где $\gamma(t)$ является $\mathbb{C}^1$ кривой, лежащей в $\mathbb{H}$, за исключением, быть может, точки $\gamma(0) = 0$.

Для реализации алгоритма был выбран язык Python, так как он подходит для широкого спектра задач.

Первым параметром будет передаваться управляющая функция в формате, который поддерживается библиотекой Numexpr. Это позволит нам вводить строку с управляющей функцией, используя синтаксис, похожий на синтаксис других подобных реализаций. Вторым параметром мы будем указывать характеристику времени: будет ли это конструкция, где время t находится в диапазоне $[0, 1]$, или же $t \in [0, \infty)$. В последнем случае вместо бесконечности мы будем вводить конкретное значение времени, которое нужно будет выбрать самостоятельно в зависимости от требуемого масштаба графика.

По умолчанию ограничимся количеством в 10000 точек, которые будут равномерно распределяться по заданному отрезку времени. В итоге, функция, описывающая разбиение временного отрезка $[0, 1]$ выглядит следующим образом:

```
def finite_time():
    time = []
    time.extend(numpy.linspace(0.0, 0.9, 10000))
    for i in range(1,9):
        time.extend(numpy.linspace(1.0-10**-i,1.0-10**-\\(i+1),10000))
    time.extend(numpy.linspace(1.0 - 10 ** -9, 1.0, \\10000))
    return time
```

Управляющая функция преобразуется в массив значений, которые мы вычисляем для каждого значения t. Затем для каждого промежутка $\delta t = t_j - t_{j-1}$ и соответствующего значения управляющей функции $\delta\lambda = \lambda_j - \lambda_{j-1}$ мы подставляем их в решение.

$$z_j = i\sqrt{4\delta t - z_j^2} + \delta\lambda \tag{3.22}$$

При последовательном применении данного вычисления на промежуток времени $[t_j, 0]$, где j - это текущий шаг, мы получим значения кусочно-гладкой функции. Таким образом, мы получаем модули для вычисления z_j

```
def trace(t, u):
    n = len(t)
    z = np.zeros(n, dtype=np.complex128)
    for i in range(n - 1, 0, -1):
        dt = t[i] - t[i - 1]
        du = u[i] - u[i - 1]
        z[i:] = maps(z[i:], dt, du)
    return z,
```

где

```
def maps(z, dt, du):
    return ne.evaluate("1j * sqrt(4 * dt - z ** 2) + du").
```

В итоге мы получим массив комплексных точек, которые можно будет отобразить на графике. Название готового изображения формируется на основе управляющей функции, при этом управляющие символы заменяются на более нейтральные.

Для этой задачи мы воспользуемся библиотекой matplotlib, в которой разложим действительную и мнимую части точек по осям графика:

```
def graph(points, name):
    plt.plot(points.real, points.imag, lw=2)
    plt.axis('equal')
    plt.savefig("results/%s.png" % name.replace("*","x").replace("/","d"
    plt.cla().
```

В завершение представим основную часть программы. В ней мы создаём массив временных точек, считываем данные из аргументов программы и вызываем нужные функции.

```
def main(drive,time):
```

```
    if time == "finite":
        t = finite_time()
    else:
        t = np.linspace(0.0, float(time), 10000)
    if "t" in drive:
        D = ne.evaluate(drive)
    else:
        D = []
        for i in range(0,10001):
        D.append(float(drive))
        points = trace(t, D)
        graph(points,drive)
        print("%s complete" % drive)
if __name__ == "__main__":
    main(sys.argv[1],sys.argv[2]).
```

Заключение. В данной бакалаврской работе был рассмотрен жизненный цикл левнеровских халлов, сгенерированных управлением в виде радикала. Для достижения данной цели была изучена теория по хордовым уравнениям Левнера и были приведены известные результаты случаев решения, когда управление осуществляется корневой функцией времени.

Самостоятельной частью работы является разработка алгоритма, описанного в последней главе. С помощью этого алгоритма была создана программа на языке программирования Python, которая визуализирует решения уравнения Левнера для различных заданных управляющих функций: $\lambda = 2\sqrt{t}$,$\lambda = \sqrt{3.5(1-t)}$,$\lambda = \sqrt{4.5(1-t)}$,$\lambda = \sqrt{4(1-t)}$,$\lambda = \sqrt[10]{t}$, которые нас интересовали.

Таким образом, цели поставленной работы достигнуты.