МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Неравенства типа Колмогорова в равномерной метрике на оси и родственные задачи. Частные случаи

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки
механико-математического факультета
Вишнякова Даниила Евгеньевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ______________ В.Г. Тимофеев

Заведующий кафедрой
зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ______________ Е.В. Разумовская

Саратов 2026

Введение. В современном математическом анализе и теории приближений значительное внимание уделяется задачам, связанным с операторами дифференцирования и их аппроксимацией. В рамках данной работы рассматривается задача оптимального приближения неограниченных линейных операторов, в частности, операторов дифференцирования, с помощью ограниченных линейных операторов.

Значительный вклад в развитие этого направления внесли исследования С.Б. Стечкина, который заложил ключевые методы. Эти задачи имеют как теоретическую ценность, так и практическое применение. В работе рассматриваются три взаимосвязанные экстремальные задачи.

Основной объект исследования бакалаврской работы – это оператор дифференцирования D^k в пространстве непрерывных функций $C(\mathbb{R})$, а также точные неравенства между нормами производных (неравенства типа Колмогорова–Ландау). Работа посвящена решению трех взаимосвязанных задач: точные неравенства Ландау–Колмогорова для производных на числовой оси, задача о наилучшем приближении оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами (задача Стечкина) и задача о наилучшем восстановлении значений производной по приближённым данным (равномерная регуляризация, задача Арестова).

Сперва изучается тема «О неравенствах между нормами верхних граней производных»: вводятся основные понятия, связанные с неравенствами между производными: величины M_0, M_1, M_2, формулируются и доказываются точные неравенства для конечного отрезка, полупрямой и всей числовой оси. Строится экстремальная функция для случая числовой оси.

Далее, согласно статье Стечкина «Наилучшее приближение линейных операторов», вводится понятие модуля непрерывности оператора, формулируется сама задача Стечкина о наилучшем приближении. Для класса K_2 устанавливается точное значение величины наилучшего приближения $E_N(1,2) = \frac{1}{2N}$ и строится оптимальный оператор.

Изучая труды Арестова, в частности, «О равномерной регуляризации задачи вычисления оператора дифференцирования», исследуется задача восстановления значения производной по приближённой функции. Для класса K_2 получено точное значение $v(\delta, \mathcal{L}) = \sqrt{2\delta}$.

Исходя из работы Колмогорова «О неравенствах между верхними гранями производных произвольных функций на бесконечном интервале», изучаются точные неравенства Колмогорова для трёх производных (M_0, M_2, M_3 и M_0, M_1, M_3). Вычисляются точные константы $C_{3,2} = 3^{1/3}$ и $C_{3,1} = 3^{2/3}/2$.

По теме «Наилучшее приближение оператора дифференцирования на классе K_3» для первой и второй производных получены точные значения наилучшего приближения: $E_N(1,3) = \frac{1}{6N^2}$ и $E_N(2,3) = \frac{2}{3\sqrt{N}}$.

Завершается работа исследованием и непосредственным решением задачи регуляризации для класса K_3, также будут построены явные формулы оптимальных операторов восстановления первой и второй производных.

Основное содержание работы. Введем необходимые определения и опишем основные результаты.

Определение. Классом функций K_n называется множество

$$K_n = \left\{ f \in W_n^{\infty}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \|f^{(n)}\|_{L^\infty} \le 1 \right\}.$$

В работе будем рассматривать классы K_2 и K_3. Далее дадим определение уравновешенного множества.

Определение. Множество Q в банаховом пространстве X называется уравновешенным, если из $f \in Q$ следует $\lambda f \in Q$ для любого скаляра λ с $|\lambda| \le 1$.

Замечание. Классы K_n являются уравновешенными.

Определение. Пусть $A : Q \subset X \to Y$ — оператор, определённый на уравновешенном множестве Q. Модулем непрерывности оператора A называется функция

$$\omega(\delta) = \sup \left\{ \|Af\|_Y \mid f \in Q,\ \|f\|_X \le \delta \right\}, \quad \delta \ge 0.$$

Для оператора дифференцирования D^1 на классе K_2 в пространстве $C(\mathbb{R})$ величина наилучшего приближения определяется как

$$E_N(D^1, K_2) = \inf_{\|S\| \le N} \sup_{f \in K_2} \|f' - Sf\|_{C(\mathbb{R})},$$

где $\|S\|$ — равномерная норма линейного оператора $S : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$.

Обозначим для функции $f(x)$:

$$M_0 = M_0(f, I) = \sup_{x \in I} |f(x)|, \quad M_1 = M_1(f, I) = \sup_{x \in I} |f'(x)|,$$

$$M_2 = M_2(f, I) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in I} |f''(x)|.$$

Сформулируем основные результаты работы.

Для оценки погрешности приближения производных необходимо знать точные соотношения между нормами самой функции и ее производных. Поэтому первый шаг — установление классических неравенств, связывающих M_0, M_1 и M_2.

Теорема. Для любой функции $f \in W_2^\infty(\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

Стоит отметить, что неравенство точное.

Приведем пример экстремальной функции, при которой достигается равенство. Равенство достигается для функции вида

$$f(x) = -\frac{M_2}{2}x^2 + M_0, \quad |x| \leq \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}},$$

с последующим нечетным продолжением на всю числовую ось. График функции представлен в соответствии с рисунком 1.1

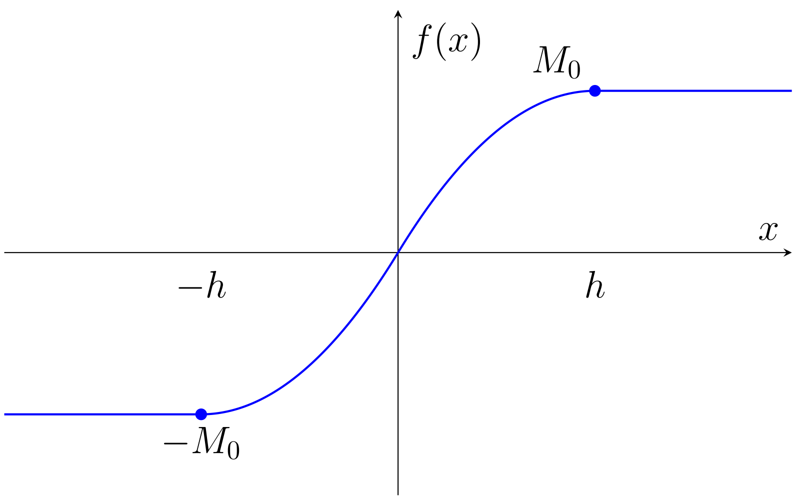

Рисунок 1.1 — График экстремальной функции

Имея в распоряжении неравенство Ландау, можно перейти к задаче Стечкина: как наилучшим образом аппроксимировать оператор дифференцирования ограниченными операторами с заданной нормой N

Теорема. Для любого положительного $N > 0$

$$E_N(D^1, K_2) = \frac{1}{2N}.$$

Оптимальный оператор имеет вид

$$S^* f(t) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Идея доказательства заключается в получении оценок. Сперва необходима оценка снизу. Из теоремы (1.1) при $\|f''\| \leq 1$ и $\|f\| \leq M_0$ получаем неравенство $\|f'\| \leq \sqrt{2M_0}$. Следовательно, модуль непрерывности $\omega(M_0) = \sqrt{2M_0}$. Используя соотношение $E_N \geq \sup_{M_0 \geq 0}(\omega(M_0) - NM_0)$, находим

$$E_N(D^1, K_2) \geq \sup_{M_0 \geq 0} \left(\sqrt{2M_0} - NM_0 \right) = \frac{1}{2N}.$$

Оценка сверху. Рассмотрим оператор $S^* f(t) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h}$ с $h = 1/N$. Разлагая $f(t \pm h)$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа, получаем

$$\|f' - S^* f\| \leq \frac{h}{2}\|f''\| \leq \frac{h}{2} = \frac{1}{2N}.$$

Таким образом, $E_N \leq \frac{1}{2N}$. Соединяя оценки сверху и снизу, получаем равенство.

Как правило, функция известна не точно, а с погрешностью δ. Поэтому возникает задача равномерной регуляризации, исследованная Арестовым: как восстановить производную по приближённым данным с минимально гарантированной погрешностью. Равномерная регуляризация у нас будет на классе K_2

Определение. Величина наилучшего восстановления оператора дифференцирования по приближённым данным определяется как

$$v(\delta, \mathcal{L}) = \inf_{T \in \mathcal{L}} \sup_{f \in K_2} \sup_{\|u - f\| \leq \delta} \|f' - Tu\|,$$

где $\mathcal{L}$ — множество линейных ограниченных операторов.

Теорема.

$$v(\delta, \mathcal{L}) = \sqrt{2\delta}.$$

Экстремальной является функция Ландау

$$f_*(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 + \sqrt{2\delta}\, x - \delta, & 0 \le x \le \sqrt{2\delta}, \\ 0, & x > \sqrt{2\delta} \end{cases}$$

с нечетным продолжением на отрицательную полуось.

Замечание. Из теоремы и определения $\varepsilon(\delta) = \inf_{N>0}\{E_N + \delta N\}$ получаем

$$\varepsilon(\delta) = \inf_{N>0} \left\{ \frac{1}{2N} + \delta N \right\} = \sqrt{2\delta}.$$

Поскольку $\omega(\delta) = \sqrt{2\delta}$, то из общего соотношения $\omega(\delta) \le v(\delta, \mathcal{L}) \le \varepsilon(\delta)$ вытекает точное равенство $v(\delta, \mathcal{L}) = \sqrt{2\delta}$.

Неравенства Колмогорова для трех производных. Для более гладких функций (с ограниченной третьей производной) требуются неравенства, связывающие M_0, M_1, M_2 и M_3. Они были получены Колмогоровым и позволяют перейти к классу K_3.

Рассмотрим теперь функцию $f(x)$, первые три производные которой ограничены на $I = \mathbb{R}$. Ограниченность n-й производной понимается в том смысле, что $(n-1)$-я производная имеет ограниченные производные числа.

Теорема. Для того чтобы тройке неотрицательных чисел M_0, M_2, M_3 соответствовала функция $f(x) \in W_3^\infty(\mathbb{R})$ с

$$M_0 = M_0(f), \quad M_2 = M_2(f), \quad M_3 = M_3(f),$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$M_2 \le C_{3,2}\, M_0^{1/3} M_3^{2/3},$$

где величины, необходимые для теоремы, имеют следующий вид

$$C_{3,2} = \frac{K_1}{K_3^{1/3}}, \quad K_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi}{2}, \quad K_3 = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^3}{24}.$$

Теорема. Для тройки M_0, M_1, M_3 необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$M_1 \leq C_{3,1}\, M_0^{2/3} M_3^{1/3},$$

где

$$C_{3,1} = \frac{K_2}{K_3^{2/3}}, \quad K_2 = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{\pi^2}{8}.$$

В качестве следствия можно представить численные значения констант:

$$C_{3,2} = 3^{1/3} \approx 1.44225, \qquad C_{3,1} = \frac{3^{2/3}}{2} \approx 1.04004.$$

Значения констант были получены через бета-функцию Дирихле, дзета-функцию Римана, числа Бернулли, а также посредством решения базельской задачи.

Замечание. От теоремы выше перейдем к оценкам: при $\|f'''\| \leq 1$ и $\|f\| \leq M_0$ получаем

$$\|f'\| \leq C_{3,1} M_0^{2/3}.$$

Эта оценка будет использована ниже при выводе величины наилучшего приближения на классе K_3. В качестве следствия можно представить численные значения констант:

$$C_{3,2} = 3^{1/3} \approx 1.44225, \qquad C_{3,1} = \frac{3^{2/3}}{2} \approx 1.04004.$$

Значения констант были получены через бета-функцию Дирихле, дзета-функцию Римана, числа Бернулли, а также посредством решения базельской задачи.

Для наглядности приведем график функции $f_3(x)$, которая играет ключевую роль при доказательстве точности неравенств Колмогорова для трех производных. Функция $f_3(x)$ определяется рядом

$$f_3(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\bigl((2m+1)x - \frac{3\pi}{2}\bigr)}{(2m+1)^4} = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\bigl((2m+1)x\bigr)}{(2m+1)^4}.$$

Для неё справедливы соотношения:

$$f_3^{(k)}(x) = f_{3-k}(x), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

где $f_0(x)$ — пилообразная функция с амплитудой 1, а верхние грани производных равны

$$M_0(f_3) = K_3 = \frac{\pi^3}{24}, \qquad M_2(f_3) = K_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad M_3(f_3) = 1.$$

Масштабированием f_3 получаются функции, на которых достигаются равенства в теоремах, которые были описаны ранее.

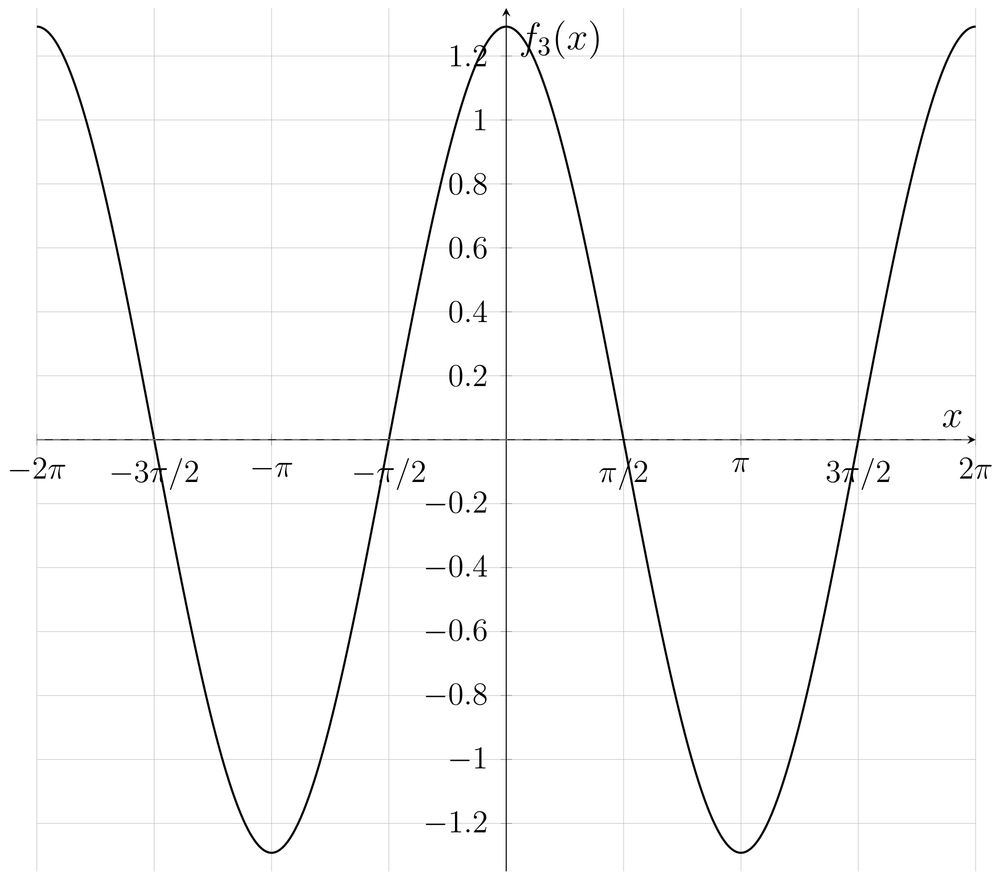

Рисунок 1.2 — График функции $f_3(x)$ на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$

В соответствии с рисунком 1.2 из графика видно, что $f_3(x)$ является гладкой периодической функцией, её максимум достигается в окрестности $x = 0$, а минимумы — вблизи $x = \pm\pi$. С помощью преобразований $af_3(bx+c)$ можно получать функции с заданными M_0, M_3, что используется в доказательстве выше сформулированных теорем. Используя неравенства Колмогорова для трех производных, можно получить точные значения наилучшего приближения для классов K_3 как для первой, так и для второй производной.

Теорема. Для первой и второй производных имеют место следующие оценки:

$$E_N(D^1, K_3) = \frac{1}{6N^2}, \quad S^*f(t) = \frac{f(t+1/N) - f(t-1/N)}{2/N}.$$

$$E_N(D^2, K_3) = \frac{2}{3\sqrt{N}}, \quad S^*f(t) = \frac{f(t+2/\sqrt{N}) - 2f(t) + f(t-2/\sqrt{N})}{(2/\sqrt{N})^2}.$$

Доказательство для случая первой производной выполняется следующим образом. Оценка снизу: из теоремы Колмогорова (4.2) при $\|f'''\| \le 1$ имеем $\|f'\| \le C_{3,1}M_0^{2/3}$. Тогда $E_N(1,3) \ge \sup_{M_0 \ge 0}(C_{3,1}M_0^{2/3} - NM_0) = \frac{1}{6N^2}$. Оценка сверху получим исходя из оператора $S^*f(t) = \frac{f(t+h)-f(t-h)}{2h}$ с $h = 1/N$ с разложением в ряд Тейлора до третьего порядка

$$\|f' - S^*f\| \le \frac{h^2}{6}\|f'''\| \le \frac{1}{6N^2}.$$

Для второй производной рассуждения аналогичны: из теоремы Колмогорова 4 получаем оценку снизу, а для оценки сверху используется центральная разность второго порядка с шагом $h = 2/\sqrt{N}$.

По аналогии со случаем K_2, решается задача регуляризации для классов K_3, что дает оптимальные формулы численного дифференцирования.

Теорема. При восстановлении первой производной:

$$v_1(\delta) = \frac{3^{2/3}}{2}\,\delta^{2/3}, \quad T_*u(t) = \frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h}, \quad h = (3\delta)^{1/3}.$$

При восстановлении второй производной:

$$v_2(\delta) = \frac{2}{3^{2/3}}\,\delta^{1/3}, \quad T_* u(t) = \frac{u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)}{h^2}, \quad h = 2(3\delta)^{1/3}.$$

Замечание. (о получении формул) Из теоремы о наилучшем приближении на классе K_3 имеем
$E_N(1,3) = 1/(6N^2)$ и $E_N(2,3) = 2/(3\sqrt{N})$. Решая задачи оптимизации $\epsilon_1(\delta) = \inf_{N>0}\{1/(6N^2) + \delta N\}$ и $\epsilon_2(\delta) = \inf_{N>0}\{2/(3\sqrt{N}) + \delta N\}$, находим оптимальные N_* и соответствующие погрешности. Оптимальные операторы получаются подстановкой N_* в формулы из теоремы наилучшего приближения.

Для проверки полученных теоретических результатов и демонстрации работоспособности оптимальных операторов был проведен численный эксперимент.

Рассматривалась функция

$$f(x) = \sin(x)$$

принадлежащая классу K_2 и после соответствующего масштабирования.

Для функции

1. Строился график исходной функции с погрешностью входных данных $\delta = 0.05$.

2. От полученной функции строилась численная производная, которая не похожа на точную производную.

3. Через наилучшее восстановление удалось снизить ошибку ошибку восстановления производной.

Результаты эксперимента показали, что фактическая погрешность не превосходит теоретической границы и стремится к ней при уменьшении шага, что подтверждает оптимальность. Также классическое дифференцирование неустойчиво к погрешности в данных, а регуляризация позволяет получить более точный результат. Ошибка снижается более чем в 15 раз.

Заключение. Таким образом, в работе решены три взаимосвязанные задачи:

– точные неравенства между производными на числовой оси;

– наилучшее приближение оператора дифференцирования ограниченными операторами;

– оптимальное восстановление(задача регуляризации).

Получены явные формулы для оптимальных операторов и точные значения погрешностей:

– вычислены точные константы в неравенствах Колмогорова: $C_{3,1}, C_{3,2}$;

– для класса K_2 получена оценка: $E_N(1,2) = \dfrac{1}{2N}$;

– для класса K_2 получена оценка: $v(\delta) = \sqrt{2\delta}$;

– для класса K_3 получены оценки: $E_N(1,3) = \dfrac{1}{6N^2}$, $E_N(2,3) = \dfrac{2}{3\sqrt{N}}$;

– для класса K_3 получены оценки: $v_1(\delta) = \dfrac{3^{2/3}}{2}\delta^{2/3}, \quad v_2(\delta) = \dfrac{2}{3^{2/3}}\delta^{1/3}$.

Работа носит завершенный характер и может быть использована как теоретическая основа для построения устойчивых методов численного дифференцирования. Результаты могут служить эталоном при оценке погрешности численных методов.

В ходе выполнения дипломной работы был разработан программный код на языке `Python`, реализующий численное исследование задачи оптимального восстановления производных. Программа позволяет увидеть, что классическое дифференцирование неустойчиво к погрешности входных данных, а предложенная регуляризация (сглаживание) позволяет снизить ошибку восстановления первой производной более чем на порядок.