МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

РАНГОВЫЕ ФУНКЦИИ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Крючкова Ивана Андреевича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., доцент В. Б. Поплавский

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., доцент В. Б. Поплавский

Саратов 2026

Введение Булевы матрицы находят широкое применение в экономике, медицине, генетике, кибернетике и теории автоматов. Цель работы — исследование ранговых функций на множестве булевых матриц, установление связей между ними и изучение их инвариантных свойств относительно классов Грина.

Основное содержание работы

Определение 1.1.1. Булевой алгеброй называется множество $\mathbf{B}$, на котором определены бинарные операции $\cup : \mathbf{B} \times \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$, $\cap : \mathbf{B} \times \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$, унарная операция $' : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$, и выделены элементы $0, 1 \in \mathbf{B}$. Причём для любых $x, y, z \in \mathbf{B}$ выполняются тождества:

1. $x \cup y = y \cup x$,
2. $x \cap y = y \cap x$,
3. $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$,
4. $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$,
5. $x \cup (x \cap y) = x$,
6. $x \cap (x \cup y) = x$,
7. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$,
8. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$,
9. $x \cap 0 = 0$,
10. $x \cup 1 = 1$,
11. $x \cup x' = 1$,
12. $x \cap x' = 0$.

Через $\mathbf{B}_{m \times n}$ обозначим множество матриц порядка $m \times n$. Элементы матриц A, B, которые являются элементами булевой алгебры $\mathbf{B}$, будем записывать как $A^i_j, B^i_j, \ldots$, где $i = 1, 2, \ldots, m$ – номера строк, $j = 1, 2, \ldots, n$ – номера столбцов.

Определение 1.1.2. Произведением $m \times n$ - матрицы $A = (A^i_j) \in \mathbf{B}_{m \times n}$ на $n \times k$-матрицу $B = (B^t_s) \in \mathbf{B}_{n \times k}$ назовём матрицу $C = AB$ размера $m \times k$, элементы которой C^i_s вычисляются по формуле

$$C^i_s = (AB)^i_s = \bigcup_{t=1}^{n} (A^i_t \cap B^t_s).$$

Заметим, что произведение определено только для согласованных по размеру матриц. Поэтому эту операцию можно назвать частичной. Для произвольных матриц A, B, C соответствующих размеров и произвольных булевых скаляров $\lambda \in \mathbf{B}$ выполняются следующие свойства.

1. $A(BC) = (AB)C$,
2. $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$, $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$,
3. $AE = A$, $EA = A$,
4. $AO = O$, $OA = O$,
5. $(AB)^T = B^T A^T$,
6. $A(B \cap C) \subseteq (AB) \cap (AC)$, $(A \cap B)C \subseteq (AC) \cap (BC)$,
7. $\lambda \cap (AB) = (\lambda \cap A)B = A(\lambda \cap B) = (\lambda \cap A)(\lambda \cap B)$,
8. $\lambda \cup (AB) = (\lambda \cup A)(\lambda \cup B)$.

Матрица $E = (E^i_j)$ есть квадратная единичная матрица соответствующего размера. Элемент E^i_j принимает значение 1, если $i = j$, и значение 0, если $i \neq j$. O есть нулевая матрица соответствующего размера. A^T означает транспонирование матрицы A.

Нетрудно доказать, что из $A \subseteq B$ следует $DA \subseteq DB$ или $AD \subseteq BD$ для любой матрицы D подходящего размера, поэтому множество булевых матриц всевозможных размеров относительно произведения образует упорядоченную частичную полугруппу с ассоциативной операцией матричного произведения. Эту полугруппу будем обозначать через $\mathbf{M}(\mathbf{B})$.

Определение 1.3.1. Булева матрица A называется *строчно совместимой*, если $AI = I$, где I – матрица, составленная из единиц булевой алгебры $\mathbf{B}$. Булева матрица A называется *столбцово совместимой*, если $IA = I$.

Если булева алгебра тривиальна, то есть $\mathbf{B} = \{0, 1\}$, то строчная совместимость означает наличие в каждой строке матрицы единицы. Соответственно, столбцовая совместимость означает наличие единицы в каждом столбце матрицы. Для столбцовой и строчной совместимости матрицы в случае произвольной булевой алгебры критерий выглядит сложнее. Приведём его.

Теорема 1.3.1. Матрица A строчно (столбцово) совместима тогда и только тогда, когда $E \subseteq AA^T$ (соответственно $E \subseteq A^T A$).

Теорема 1.3.2. Верны следующие утверждения:

1. Если A и B являются строчно (столбцово) совместимыми, тогда AB строчно (столбцово) совместима.
2. Если AB строчно совместима, то A строчно совместима.
3. Если AB столбцово совместима, то B столбцово совместима.

Обратные утверждения не верны.

Если $AB = BA = E$ для квадратных матриц A и B, то будем их называть обратными. Обратную матрицу для A обозначать через A^{-1}. Тогда $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Следуя классической терминологии, матрицу A будем называть *ортогональной*, если она имеет обратную, равную $A^{-1} = A^T$.

Теорема 1.4.1. Булева квадратная матрица A ортогональна тогда и только тогда, когда она и строчно, и столбцово совместима и для каждого i, j, k, $i \neq j$, выполняется условие дизъюнктности элементов в столбцах и строчках $A_k^i \cap A_k^j = A_i^k \cap A_j^k = 0$.

Теорема 1.4.2. Для булевой квадратной матрицы существует обратная матрица тогда и только тогда, когда она ортогональна.

Определение 2.1.1. Назовем *линейной комбинацией* $m \times n$-матриц $B_1, B_2, \ldots, B_k$ с коэффициентами $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^k$ выражение $(\lambda^1 \cap B_1) \cup (\lambda^2 \cap B_2) \cup \ldots \cup (\lambda^k \cap B_k)$.

Линейной оболочкой $m \times n$-матриц $B_1, B_2, \ldots, B_k$ назовем множество всевозможных линейных комбинаций этих булевых матриц. Это множество обозначим через $S(\{B_1, B_2, \ldots, B_k\})$.

Будем говорить, что матрица B *зависит* от матриц $B_1, B_2, \ldots, B_k$, если $B \in S(\{B_1, B_2, \ldots, B_k\})$. Множество матриц $B_1, B_2, \ldots, B_k$ назовем *множеством независимых матриц*, если каждая матрица $B_j, j = 1, 2, \ldots, k$, не принадлежит линейной оболочке $S(\{B_1, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_k\})$ других матриц этого множества.

Укажем свойства линейных оболочек.

Теорема 2.1.1. Матрицы $B_1, B_2, \ldots, B_k$ принадлежат линейной оболочке $S(\{C_1, C_2, \ldots, C_p\})$ тогда и только тогда, когда

$$S(\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}) \subseteq S(\{C_1, C_2, \ldots, C_p\}).$$

Теорема 2.1.2. Если B_j является линейной комбинацией матриц $B_1, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_k$, то

$$S(\{B_1, \ldots, B_{j-1}, B_j, B_{j+1}, \ldots, B_k\}) = S(\{B_1, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_k\}).$$

Определение 2.1.2. Через $C(A)$ обозначим линейную оболочку всех столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ некоторой булевой $m \times n$-матрицы A и назовем ее *столбцовым пространством.* Линейная оболочка всех строк $A^1, A^2, \ldots, A^m$ данной матрицы A определяет *строчное пространство* $R(A)$ булевой $m \times n$-матрицы A.

Множество таких независимых столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ некоторой матрицы A, что $C(A) = S(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}), (k \leq n)$, назовем *столбцовым базисом* матрицы A. *Строчный базис* $A^1, A^2, \ldots, A^p, (p \leq m)$ определяется аналогично.

Множество всех столбцовых базисов (или всех строчных базисов) матрицы A может содержать базисы, состоящие из различного количества столбцов (или строк).

Определение 2.1.3. *Размерностью пространства столбцов* $C(A)$ или *столбцовым рангом* матрицы A назовем число, обозначаемое либо $\dim C(A)$, либо $rank_C A$, и равное наименьшему возможному числу столбцов всех таких матриц B, для которых $C(A) = C(B)$. Соответственно, *размерностью пространства строк* $R(A)$ или *строчным рангом* матрицы A назовем число, обозначаемое либо $\dim R(A)$, либо $rank_R A$, и равное наименьшему возможному числу строк всех таких матриц B, для которых $R(A) = R(B)$.

Заметим, что в общем случае $rank_C A \neq rank_R A$.

Из определения 2.1.3 получается, что для любой булевой матрицы A обязательно существует матрица B с тем же самым столбцовым или строчным пространством, для которой выполняется $rank_C B = rank_C A$ или $rank_R B = rank_R A$. Матрицу B при этом можно считать образованной только из тех столбцов, что дают минимальный столбцовый базис пространства столбцов $C(A)$.

Теорема 2.1.3. Для выполнения равенства $A = BU$ (или $A = UB$), где U является некоторой булевой матрицей подходящего размера, а A и B

— две булевые матрицы с одинаковым количеством строк (или столбцов), необходимо и достаточно, чтобы $C(A) \subseteq C(B)$ (или $R(A) \subseteq R(B)$).

Теорема 2.1.4. Две матрицы с одинаковым количеством строк (столбцов) A и B имеют одинаковые столбцовые пространства $C(A) = C(B)$ (соответственно $R(A) = R(B)$) тогда и только тогда, когда выполняется $A = BU$ и $B = AV$ (соответственно $A = UB$ и $B = VA$) для некоторых булевых матриц U и V подходящего размера, то есть порождают один и тот же главный правый (левый) идеал в частичной полугруппе булевых матриц всевозможных размеров $\mathbf{M}(\mathbf{B})$.

Теорема 2.1.5. Матрицы с одинаковым количеством строк (или столбцов) A и B имеют одинаковые столбцовые пространства $C(A) = C(B)$ (соответственно $R(A) = R(B)$) тогда и только тогда, когда для любой матрицы D соответствующего размера выполняется $C(DA) = C(DB)$ (соответственно $R(AD) = R(BD)$).

Определение 2.1.4. Пусть для булевой матрицы $A_{m\times n} \in \mathbf{B}_{m\times n}$ существуют матрицы $\tilde{A}_{m\times r} \in \mathbf{B}_{m\times r}$ и $\tilde{\tilde{A}}_{r\times n} \in B_{r\times n}$ такие, что $A_{m\times n} = \tilde{A}_{m\times r}\tilde{A}_{r\times n}$. Тогда наименьшее число r называется *факторизационным рангом* (или *рангом факторизации*) матрицы $A_{m\times n}$. Этот ранг факторизации будем обозначать через $r = rank_f A$.

Дадим иную трактовку рангу факторизации: ранг факторизации $rank_f A = r$ означает, что каждый столбец или строка матрицы $A_{m\times n}$ являются линейной комбинацией каких-то, не обязательно принадлежащих самой матрице $A_{m\times n}$, столбцов или строк в количестве $r = rank_f A$, и это число нельзя сделать меньше.

Теорема 2.1.6. Для любой булевой матрицы A справедливо:

$$rank_f A \leq rank_C A, \quad rank_f A \leq rank_R A.$$

Теорема 2.1.7. Факторизационный ранг произведения не превосходит рангов факторизации сомножителей для любых двух булевых матриц A, B подходящего размера:

$$rank_f AB \leq rank_f A, \quad rank_f AB \leq rank_f B.$$

Обозначим символами ε_C и ε_R бинарные отношения на множестве булевых матриц всевозможных конечных размеров, которым принадлежит пара булевых матриц (A, B), если их столбцовые или строчные пространства соответственно одинаковы. Очевидно, они являются отношениями эквивалентности на частичной полугруппе булевых матриц всевозможных конечных размеров $\mathbf{M}(\mathbf{B})$.

Обозначим через $\varepsilon_C(A) = \{B \in \mathbf{M}(\mathbf{B}) : C(B) = C(A)\}$ и $\varepsilon_R(A) = \{B \in \mathbf{M}(\mathbf{B}) : R(B) = R(A)\}$ соответствующие классы эквивалентности, порожденные матрицей A.

Как известно, пересечение эквивалентностей $\varepsilon_H = \varepsilon_C \cap \varepsilon_R \subseteq \mathbf{M}(\mathbf{B}) \times \mathbf{M}(\mathbf{B})$ также является эквивалентностью. Классы эквивалентности ε_H определяются условием $\varepsilon_H(A) = \{B \in \mathbf{M}(\mathbf{B}) : (C(B) = C(A)) \wedge (R(B) = R(A))\} = \varepsilon_C(A) \cap \varepsilon_R(A)$.

Объединение бинарных отношений $\varepsilon_C \cup \varepsilon_R$ в общем случае эквивалентностью не является, так как для него не выполняется условие транзитивности. Обозначим транзитивное замыкание объединения бинарных отношений, содержащее ε_C и ε_R через ε_D. Таким образом, $\varepsilon_D = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_C \cup \varepsilon_R)^k$ и ε_D будет эквивалентностью, причем наименьшей среди всех эквивалентностей, содержащих эквивалентности ε_C и ε_R. Следующая теорема показывает, что эту эквивалентность можно получить по-другому, точнее, как произведение эквивалентностей ε_C и ε_R.

Теорема 2.2.1. Верны следующие равенства:

$$\varepsilon_D = \varepsilon_C \vee \varepsilon_R = \varepsilon_C \cdot \varepsilon_R = \varepsilon_R \cdot \varepsilon_C$$

Определение 2.2.1. Говорят, что булевы матрицы A и B из частичной полугруппы $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ находятся в отношении ε_J, если двусторонние главные идеалы, порожденные матрицами A и B, совпадают. Иными словами, A и B находятся в отношении ε_J тогда и только тогда, когда найдутся матрицы U_1, U_2, V_1, V_2 подходящих размеров, что $A = V_1 B U_1$ и $B = V_2 A U_2$.

Теорема 2.2.3. Отношения эквивалентности ε_D и ε_J для булевых матриц всевозможных размеров совпадают.

Теорема 2.3.1. Ранги факторизации всех матриц, находящихся в одном ε_J-классе частичной полугруппы $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ булевых матриц всевозможных размеров равны.

Неравенства

$$\varepsilon_H \subseteq \varepsilon_R(C) \subseteq \varepsilon_C \cdot \varepsilon_R = \varepsilon_R \cdot \varepsilon_C = \varepsilon_D = \varepsilon_J$$

позволяют сказать, что все матрицы, находящиеся в одном классе перечисленных здесь эквивалентностей, обладают одним и тем же рангом факторизации. Это также означает, что каждый столбец или строчку матрицы из данного класса можно представлять в виде линейных комбинаций каких-то, не обязательно принадлежащих самой матрице, столбцов или строк, число которых нельзя сделать меньше, чем ранг факторизации данной матрицы.

Теорема 2.3.2. Для любых двух матриц A и B из одного ε_J-класса выполняется $rank_C A = rank_C B$ и $rank_R A = rank_R B$.

Теорема 2.8.1. Существует квадратная $n \times n$-матрица с ненулевым определителем, принадлежащая некоторому ε_J-классу, тогда и только тогда, когда столбцовый, строчный, факторизационный и минорный ранги любой матрицы этого же ε_J-класса равны между собой и равны n. Определители всех матриц того же размера $n \times n$ равны, а определители квадратных матриц, принадлежащие этому же ε_J-класс, но большего чем $n \times n$ размера, равны нулю.

Теорема 2.8.2. Пусть по крайней мере пара значений на некоторой булевой матрице A ранговых функций среди $rank_R A$, $rank_C A$, $rank_f A$, $rank A$ различны, тогда все определители квадратных матриц класса $\varepsilon_J(A)$ равны нулю.

Теорема 2.9.1.(Люца) Пусть A и B булевы матрицы одного и того же порядка. Если существует матрица C такая, что $C \subseteq A$ и $B \subseteq CI$, тогда а) неравенство $AX \supseteq B$ имеет решение; б) множество решений неравенства $AX \supseteq B$ содержит все матрицы X, удовлетворяющие условию $X \supseteq C^T B$.

Приведённые ниже теоремы 2.9.2 - 2.9.6 получены В.Б. Поплавским. Они указывают на достаточные условия разрешимости некоторых типов булево-матричных уравнений и неравенств, сформулированные в терминах минорноранговых функций. Мы воспроизводим их доказательства, приведённые в статье [11].

Теорема 2.9.2. Пусть A — булева матрица размера $m \times n$ и B — столбец размера $m \times 1$ с элементами из тривиальной булевой алгебры $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$. Если столбец B не увеличивает ранга матрицы A при приписывании его к столбцам матрицы A, то уравнение

$$AX = AY \cup B,$$

где X, Y — столбцы неизвестных, имеет решение.

Теорема 2.9.3. Пусть даны булева матрица A размера $m \times n$ и B — столбец размера $m \times 1$ с элементами из булевой алгебры $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$. Если столбец B не увеличивает ранга матрицы A при приписывании его к столбцам матрицы A, то система матричных неравенств

$$|AX - AY| \subseteq B \subseteq A(X \cup Y),$$

где X, Y — столбцы неизвестных, имеет решение.

Теорема 2.9.4. Пусть даны булева матрица A размера $m \times n$ и B — столбец размера $m \times 1$ с элементами из булевой алгебры $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$. Если столбец B не увеличивает ранга матрицы A при приписывании его к столбцам матрицы A, то матричное неравенство

$$B \subseteq AX,$$

где X — столбец неизвестных, имеет решение.

Совместность матричного уравнения $AX = B$ (или $XA = B$) над любой булевой алгеброй, как показывает следующая теорема, всегда влечет то, что столбцы матрицы B, при их приписывании к столбцам матрицы A, не изменяют минорный ранг матрицы A.

Теорема 2.9.5. Пусть A и B —матрицы размера $m \times n$ и $m \times k$ соответственно над произвольной булевой алгеброй. Если уравнение $AX = B$ имеет решение, то $rank(A|B) = rankA$.

Теорема 2.9.6. Пусть A и B —булевы матрицы размеров $m \times n$ и $m \times k$ соответственно и C — столбец размера $m \times 1$ над $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$ такие, что система m линейных уравнений с $n+k$ неизвестными, записанная в матричной форме как

$$(AX) \cup (BY) = C,$$

имеет решение. Тогда, если столбцы матрицы B не увеличивают минорный ранг матрицы A, то матричное неравенство со столбцом неизвестных Z вида

$$C \subseteq AZ$$

имеет решение.

Теорема 2.9.7. Пусть A и B —булевы матрицы одинаковых размеров с элементами из $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$. Тогда условие теоремы Люца 2.9.1 дает утверждение этой теоремы а) как следствие теоремы Поплавского 2.9.4.

Покажем, что условие Люца является достаточным для выполнения условия Поплавского, но не необходимым. Другими словами, критерий Поплавского является более общим.

Теорема 2.10.1. Если для матрицы A и столбца B выполняется условие Люца (существует C с $C \subseteq A$ и $B \subseteq CI$), то $\mathrm{rank}(A \mid B) = \mathrm{rank}(A)$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Существуют матрицы A и столбцы B, для которых условие Поплавского выполнено, но никакая матрица C, удовлетворяющая условию Люца, не существует.

В рамках работы была разработана программа на языке *Python*, реализующая основные теоретические результаты, полученные в главах 1 и 2. Программа предназначена для вычисления строчных и столбцовых рангов булевых матриц, проверки включений и равенств пространств.

Разработанная программа:

1. полностью реализует математический аппарат, описанный в главах 1–2;
2. позволяет наглядно демонстрировать ключевые теоремы на конкретных примерах;
3. может быть использована для дальнейших исследований свойств булевых матриц, например, для анализа распределения рангов случайных матриц или проверки гипотез о связи различных ранговых функций;

4. предоставляет удобный инструмент для верификации результатов при решении прикладных задач диагностики, анализа графов и синтеза дискретных устройств.

Заключение В работе введены и исследованы столбцовый, строчный, факторизационный, минорный и перманентный ранги булевых матриц. Показано, что эти ранги являются инвариантами классов Грина. Установлены неравенства между различными рангами. Разработанный аппарат применён к задачам совместности булево-матричных неравенств. Результатом данной работы является программа на языке $Python$ которая при вводе матриц считает их столбцовый и строчный ранг, находит минимальный набор столбцов порождающих $C(A)$ и минимальный набор строк порождающих $R(A)$.