МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Геометрии

БУЛЕВЫЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета
Григорьева Андрея Алексеевича

Научный руководитель
доцент, д. ф.-м. н. ______________ В. Б. Поплавский

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ В. Б. Поплавский

Саратов 2026

Введение. Актуальность темы. Булево-матричный анализ сегодня претерпевает бурное развитие в связи с его приложениями в различных областях научного познания. Матрицы с элементами из решёток, в частности, булевых алгебр, применяются и в экономике, и при решении проблем диагностики в медицине, в генетике, и в социальных науках. Обширно используется также в кибернетике, теории конечных недетерминированных автоматов, при решении проблем искусственного интеллекта, основываясь на таких математических теориях, как теория полугрупп, полуколец, полумодулей и комбинаторика. Зачастую моделирование в технике, физике, химии и геологии основано на использовании анализа булево-матричных функций. Так, булевы матрицы над двухэлементной булевой алгеброй можно рассматривать как матрицы инцидентности графов, что делает очевидной связь булевых матриц с математической логикой и бинарными отношениями. Всё это делает тему квалификационной работы актуальной.

В нашей работе рассматривается булева алгебра булевых матриц, операции которой (объединение, пересечение, дополнение) определяются поэлементно. С другой стороны, с помощью булевых операций строится операция матричного умножения, относительно которого квадратные булевы матрицы образуют полугруппу. В данной магистерской работе изучаются свойства этих операций. В частности, исследуется проблема обратимости булевых матриц и разрешимости систем линейных булевых уравнений и неравенств.

Объектом исследования являются булевы матрицы и алгебраические структуры на их множествах.

Предметом исследования выступает проблема обратимости в полугруппах булевых матриц, теория обобщённых обратных (g-обратных) матриц и разработанные на их основе методы решения систем линейных булевых уравнений, включая их приложение к задачам диагностики компьютерных сетей.

Целью работы является систематическое изложение теории обобщённых обратных булевых матриц и разработка на её основе практического алгоритма решения булевых матричных уравнений для задач диагностики.

Для достижения поставленной цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Систематизировать основные алгебраические понятия теории булевых матриц: полугруппы, полукольца, регулярные элементы, идемпотенты, взаимно обратные элементы.
2. Исследовать понятие обобщённой обратной (g-обратной) матрицы и изучить структурную теорию, включая разложение Рао.
3. Изучить важнейшие подклассы g-обратных, прежде всего Thierrin-Vagner обратную, и проиллюстрировать их свойства на конкретных примерах.
4. Разработать алгоритм построения редуцированной Thierrin-Vagner обратной для произвольной регулярной булевой матрицы.
5. Применить разработанный теоретический аппарат к решению прикладной задачи диагностики компьютерных сетей.

Теоретическая значимость работы состоит в целостном изложении современного состояния теории обобщённых обратных булевых матриц, включая доказательство резидуальности алгебры булевых матриц, получение критериев разрешимости линейных матричных уравнений и явных формул для g-обратных и Thierrin-Vagner обратных.

Практическая значимость работы подтверждается применением разработанного математического аппарата к решению задачи диагностики компьютерных сетей методом булевой сетевой томографии, где с помощью построения g-обратной матрицы анализируется разрешимость системы и локализуются неисправные узлы. **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Доказательство резидуальности алгебры булевых матриц и явные формулы для правого и левого остатков.
2. Критерий разрешимости линейных матричных уравнений $XA = B$ и параметризация множества всех решений.
3. Явный вид g-обратных через частичные матрицы перестановок на основе разложения Рао.
4. Формула для наибольшей Thierrin-Vagner обратной через транзитивное замыкание.
5. Алгоритм решения булевых матричных уравнений и результаты

Основное содержание работы.

Первая глава носит вводный характер и посвящена изложению базовых понятий теории булевых алгебр и матриц над ними.

В начале главы даётся формальное определение булевой алгебры как множества B с бинарными операциями объединения $\cup$ и пересечения $\cap$, унарной операцией дополнения $'$ и выделенными элементами 0 и 1, удовлетворяющими стандартной системе аксиом. Отмечается, что булева алгебра является дистрибутивной решёткой с единственным дополнением для каждого элемента. На этой основе вводится частичный порядок: $a \subseteq b$ тогда и только тогда, когда $a \cap b = a$.

Далее вводится понятие булевой матрицы как матрицы, элементы которой принадлежат фиксированной булевой алгебре B. Множество $B_{m\times n}$ всех таких матриц размера $m \times n$ само образует булеву алгебру с поэлементно определёнными операциями объединения, пересечения и дополнения. Нулём этой алгебры служит матрица O, состоящая из нулей, а единицей — матрица I, состоящая из единиц. Вводится также операция умножения матрицы на булев скаляр $\lambda \in B$, что позволяет говорить о множестве булевых матриц как об аналоге линейного пространства над булевыми скалярами.

Центральной операцией является матричное умножение. Произведением матриц $A \in B_{m\times n}$ и $B \in B_{n\times k}$ называется матрица $C = AB$ размера $m\times k$, элементы которой вычисляются по формуле

$$C^i_s = (AB)^i_s = \bigcup_{t=1}^{n} (A^i_t \cap B^t_s).$$

Данная операция является частичной, поскольку определена лишь для матриц согласованных размеров. В главе перечисляются и обосновываются основные свойства матричного умножения: ассоциативность, дистрибутивность относительно объединения, роль единичной матрицы E как нейтрального элемента, свойства транспонирования и монотонность относительно частичного порядка.

На основании этих свойств делается вывод, что множество булевых матриц всевозможных размеров относительно операции произведения образует упорядоченную частичную полугруппу, обозначаемую через $M(B)$. Эта алгебраическая структура служит фундаментом для всего дальнейшего исследования.

Вторая глава посвящена систематическому исследованию алгебраических структур на множестве булевых квадратных матриц $\mathcal{B}_n$. Глава состоит из двух основных блоков: изучение симметрий и свойств совместимости, а также детальный разбор базовых алгебраических понятий — полугрупп, полуколец, регулярных элементов и идемпотентов.

Симметрии и обратимость. В начале главы вводятся понятия симметричной и кососимметричной булевой матрицы, отличные от классических аналогов. Матрица A называется симметричной, если $A^T \cap A' = O$, что, как доказывается, эквивалентно стандартному условию $A = A^T$. Кососимметричность определяется условием $A^T \cap A = O$, что равносильно представимости матрицы в виде $A = B \cap B^T$ для некоторой матрицы B. Центральным результатом этого раздела является теорема о том, что любая булева матрица однозначно разлагается в дизъюнктное объединение симметричной и кососимметричной матриц.

Далее вводится понятие совместимых матриц. Матрица называется строчно (столбцово) совместимой, если произведение её на единичную матрицу I (состоящую из всех единиц) слева (справа) даёт I. В случае двухэлементной булевой алгебры это просто означает наличие хотя бы одной единицы в каждой строке или столбце. Приводятся критерии совместимости и анализируется её сохранение при умножении матриц.

Ключевым результатом является доказательство того, что для булевых квадратных матриц существование обратной матрицы (в классическом смысле, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$) равносильно её ортогональности ($A^{-1} = A^T$). Это фундаментальное отличие от классической линейной алгебры, показывающее, что обратимые булевы матрицы — это в точности матрицы перестановок.

Алгебраические структуры. Вторая часть главы посвящена формальному введению основных алгебраических конструкций. Рассматривается булева алгебра $\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, ^-)$ как дистрибутивная решётка с дополнением. Множество $\mathbb{B}$ с операциями дизъюнкции и конъюнкции образует коммутативные полугруппы, а система $(\mathbb{B}, \vee, \wedge)$ в целом является полукольцом.

На множестве булевых матриц $\mathcal{B}_n$ вводится частичный порядок: $A \preceq B$, если $a_{ij} \leq b_{ij}$ для всех i, j. Отмечается естественная интерпретация булевых матриц как бинарных отношений и матриц смежности графов.

Затем вводится классификация элементов полугруппы $\mathcal{B}_n$ относительно операции умножения. Выделяются три ключевых класса:

— **Регулярные элементы:** $A = AXA$ для некоторого X. Множество таких элементов обозначается $\mathrm{Reg}(\mathcal{B}_n)$.

— **Идемпотенты:** $A^2 = A$. Множество идемпотентов обозначается $\mathrm{Idem}(\mathcal{B}_n)$. Всякий идемпотент регулярен, обратное неверно.

— **Взаимно обратные элементы:** пара (A, B), для которой $ABA = A$ и $BAB = B$.

Устанавливается глубокая связь между этими понятиями: в произвольной полугруппе для элемента a эквивалентны утверждения о его регулярности, существовании взаимно обратного элемента и принадлежности к $\mathcal{D}$-классу, содержащему идемпотент.

Особое внимание уделено идемпотентным булевым матрицам, играющим центральную роль в приложениях. Отмечается, что произвольный идемпотент может быть сведён к редуцированному идемпотенту, который представляет собой прямую сумму нулевой матрицы и матрицы отношения частичного порядка.

Завершается глава теоремой о максимальных подгруппах в $\mathcal{B}_n$: $\mathcal{H}$-класс является группой тогда и только тогда, когда он содержит идемпотент. Приводится исторический обзор результатов о том, что любая конечная группа может быть реализована как максимальная подгруппа в $\mathcal{B}_n$ при достаточно большом n, что демонстрирует богатство структуры полугруппы булевых матриц по сравнению с полугруппой частичных преобразований, где все максимальные подгруппы симметрические. Последняя теорема устанавливает равенство ранга любой регулярной булевой матрицы её строчному рангу.

Третья глава посвящена исследованию линейных матричных уравнений вида $XA = B$ и $AX = B$ в алгебре булевых матриц, а также анализу свойств резидуальности и делителей нуля.

В начале главы формулируется задача нахождения класса матриц X, удовлетворяющих уравнению $XA = B$. Отмечается, что данная задача сводится к нахождению пересечения двух классов матриц, удовлетворяющих неравенствам $XA \subseteq B$ и $XA \supseteq B$. Если первая задача (включение сверху) имеет полное и конструктивное решение, то для второй (включение снизу) удаётся получить лишь достаточное условие, не являющееся необходимым. Также устанавливается необходимое и достаточное условие на матрицы A и B для существования решения уравнения $XA = B$.

Центральным результатом главы является теорема о резидуальности алгебры булевых матриц. Используя понятие правого и левого остатка, введённое Г. Биркгофом для мультипликативных решёток, доказывается, что алгебра булевых матриц является резидуальной. А именно, неравенство $XA \subseteq B$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$X \subseteq (B'A^T)',$$

а неравенство $AX \subseteq B$ — тогда и только тогда, когда

$$X \subseteq (A^T B')'.$$

Таким образом, правый остаток $B : A$ и левый остаток $B :: A$ существуют и выражаются явными формулами:

$$B : A = (B'A^T)', \qquad B :: A = (A^T B')'.$$

Из данной теоремы выводится ряд следствий. В частности, устанавливается, что уравнение $XA = 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $X \subseteq (AE)^{T\prime}$. Этот результат позволяет полностью охарактеризовать правые и левые делители нуля в полугруппе булевых матриц: доказывается, что матрица A является правым делителем нуля тогда и только тогда, когда она не является строчно совместимой. Аналогично, матрица A является левым делителем нуля тогда и только тогда, когда она не является столбцово совместимой.

Также приводится критерий разрешимости уравнения $XA = B$: решение существует тогда и только тогда, когда

$$B \subseteq (B'A^T)'A.$$

При выполнении этого условия матрица $X = (B'A^T)'$ является наибольшим решением. Кроме того, любое решение может быть записано в параметрическом виде

$$X = R \cap (B'A^T)'$$

с матрицей R, удовлетворяющей условию $B \subseteq [R \cap (B'A^T)']A$.

Наконец, для неравенства $XA \supseteq B$ доказывается достаточное условие: если существует матрица C такая, что $C \subseteq A$ и $B \subseteq C$, то все матрицы $X \supseteq BC^T$ являются решениями. Отмечается, что данное условие не является необходимым.

Четвёртая глава является центральной в теоретической части работы и посвящена детальному исследованию понятия обобщённой обратной (g-обратной) матрицы и её важнейшего подкласса — Thierrin-Vagner обратной.

Понятие g-обратной. В начале главы вводится базовое определение: матрица $G \in \mathcal{B}_n$ называется обобщённой обратной (g-обратной) для матрицы A, если выполнено условие $A = AGA$. Множество всех таких матриц обозначается через $A\{1\}$. В отличие от классической обратной матрицы, g-обратная, вообще говоря, не единственна. Доказывается, что множество $A\{1\}$ замкнуто относительно операции булева сложения (дизъюнкции), откуда следует существование наибольшей (максимальной) g-обратной, если множество $A\{1\}$ не пусто.

Разложение Рао. Для конструктивного построения g-обратных вводится фундаментальное понятие разложения Рао. Согласно теореме о разложении Рао, любая булева матрица $A \in \mathcal{B}_{m\times n}$ со строчным рангом $\rho_r(A) = r$ и столбцовым рангом $\rho_c(A) = c$ может быть приведена перестановками строк и столбцов к блочному виду

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21}A_{11}^T A_{12} \end{pmatrix},$$

где блок $A_{11} \in \mathcal{B}_{r\times c}$ является матрицей полного ранга. В главе приводится подробный пример приведения конкретной матрицы размера 3×3 к форме Рао с полной проверкой всех условий.

Явный вид g-обратных. С использованием разложения Рао формулируется теорема о явном виде g-обратной: если матрица A обладает хотя бы одной g-обратной, то блок A_{11} в её разложении Рао идемпотентен, а матрица

$$G = Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

является g-обратной для A и называется частичной матрицей перестановки. В частности, для квадратных матриц полного ранга g-обратная, если существует, единственна и является матрицей перестановки.

Thierrin-Vagner обратная. Далее вводится понятие Thierrin-Vagner обратной (рефлексивной g-обратной), которая удовлетворяет двум условиям: $A = AGA$ и $G = GAG$. Множество таких матриц обозначается $A\{1,2\}$. Отмечается симметричность данных условий: если $G \in A\{1,2\}$, то и $A \in G\{1,2\}$. В терминах теории полугрупп такая пара называется взаимно обратными регулярными элементами.

Устанавливается, что множество $A\{1,2\}$ замкнуто относительно булева сложения, и если оно не пусто, то в нём существует наибольшая Thierrin-Vagner обратная, обозначаемая $A^{\#}$. Приводится явная формула для её вычисления через транзитивное замыкание: $A^{\#} = A^T(AA^T)^*$.

Обсуждается глубокая алгебраическая природа Thierrin-Vagner обратной, восходящая к работам В. В. Вагнера и Б. М. Шейна по теории регулярных элементов полугрупп бинарных отношений.

В главе также разбирается пример матрицы 3×3 полного ранга, для которой множество $A\{1,2\}$ оказывается пустым, несмотря на наличие g-обратных (элементов $A\{1\}$). Этот пример демонстрирует, что существование g-обратной не гарантирует существования рефлексивной g-обратной.

Завершается глава сравнительным анализом места Thierrin-Vagner обратной в иерархии обобщённых обратных. Отмечается, что она занимает промежуточное положение между общей g-обратной ($A\{1\}$) и более специализированными типами, такими как Moore-Penrose обратная ($A\{1,2,3,4\}$) и least-squares g-обратная ($A\{1,3\}$). В булевой алгебре Thierrin-Vagner обратная является наиболее естественным обобщением классического понятия обратной матрицы, сохраняя свойство взаимной регулярности без избыточных требований симметричности.

Пятая глава посвящена практическому применению разработанного математического аппарата к решению задачи диагностики компьютерных сетей методом булевой сетевой томографии.

В начале главы обосновывается актуальность задачи: современные компьютерные сети являются критической инфраструктурой, и отказ даже одного узла может привести к деградации качества обслуживания. Традиционные методы диагностики, основанные на активном опросе устройств, имеют ограниченную масштабируемость. Альтернативой выступает булева сетевая томография — метод, позволяющий по результатам небольшого числа сквозных измерений восстановить состояние всех внутренних узлов сети без прямого доступа к ним. Математическим ядром этого подхода является решение систем линейных уравнений над булевой алгеброй.

Рассматривается модельная компьютерная сеть, состоящая из четырёх узлов v_1, v_2, v_3, v_4. Администратор формирует три тестовых маршрута, на основе которых строится матрица маршрутов A размера 3×4. По результатам измерений получен вектор симптомов $\mathbf{b} = (1, 1, 0)^T$: сбои зафиксированы на первом и втором маршрутах, третий маршрут отработал корректно. Задача локализации неисправностей сводится к решению булева уравнения $A \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $x_j = 1$ означает неисправность узла v_j.

Для матрицы A, имеющей полный строчный ранг, строится g-обратная матрица G, удовлетворяющая условию $A \otimes G \otimes A = A$. Проверка критерия совместности $A \otimes G \otimes \mathbf{b} = \mathbf{b}$ подтверждает разрешимость системы. Частное решение находится по формуле $\mathbf{x}_0 = G \otimes \mathbf{b}$ и даёт вектор $(1, 1, 0, 0)^T$, что означает неисправность узлов v_1 и v_2. Подстановка найденного решения в исходное уравнение подтверждает его корректность.

Отмечается, что полученное решение не единственно: например, вектор $(1, 1, 0, 1)^T$ также удовлетворяет уравнению, поскольку добавление неисправного узла v_4 не меняет наблюдаемой картины сбоев. Это иллюстрирует принципиальную неединственность решения в задачах данного класса, являющуюся следствием идемпотентности булева сложения.

В завершение главы приводится описание программной реализации разработанного алгоритма и результатов численного эксперимента, подтвердившего работоспособность метода g-обратных матриц применительно к задаче локализации неисправностей в компьютерных сетях.

Заключение.

В ходе выполнения магистерской работы было проведено систематическое исследование теории булевых матричных уравнений и неравенств, центральным инструментом которого выступил аппарат обобщённых обратных матриц.

В теоретической части работы доказана резидуальность алгебры булевых матриц, что позволило получить явные формулы для правого и левого остатков и на их основе установить критерий разрешимости линейных матричных уравнений вида $XA = B$. Показано, что решение существует тогда и только тогда, когда $B \subseteq (B'A^T)'A$; при выполнении этого условия наибольшее решение даётся матрицей $X = (B'A^T)'$. Получена параметризация множества всех решений, а также дана полная характеризация делителей нуля в полугруппе булевых матриц.

Систематизирована теория обобщённых обратных матриц. С опорой на структурное разложение Рао, позволяющее привести произвольную булеву матрицу к блочному виду с выделением подматрицы полного ранга, установлен явный вид g-обратных через частичные матрицы перестановок. Исследован важнейший подкласс g-обратных — Thierrin-Vagner обратные, удовлетворяющие условию взаимной регулярности. Получена явная формула для наибольшей Thierrin-Vagner обратной через транзитивное замыкание: $A^{\#} = A^T(AA^T)^*$.

Практическая значимость разработанного аппарата подтверждена решением задачи локализации неисправностей в компьютерных сетях методом булевой сетевой томографии. Для модельной сети построена g-обратная матрица, с её помощью проверена разрешимость системы и найдено частное решение, позволившее определить неисправные узлы. Программная реализация алгоритма подтвердила его работоспособность. Проведённый анализ неоднозначности решения показал, что она является естественным следствием идемпотентности булева сложения и должна учитываться при интерпретации результатов диагностики.

Полученные результаты могут найти применение в задачах анализа формальных понятий, теории графов, диагностики дискретных систем.