

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра \_\_\_\_\_ геометрии \_\_\_\_\_

Свойства конъюнктивных операций над бинарными отношениями

рангов 7 и 8

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента \_\_\_\_\_ 4 \_\_\_\_\_ курса \_\_\_\_\_ 421 \_\_\_\_\_ группы

направление \_\_\_\_\_ 02.03.01 — Математика и компьютерные науки \_\_\_\_\_  
код и наименование направления

\_\_\_\_\_ механико-математического факультета

\_\_\_\_\_ наименование факультета, института, колледжа

\_\_\_\_\_ Рогожина Евгения Александровича

\_\_\_\_\_ фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

\_\_\_\_\_ профессор, д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_ должность, уч. степень, уч. звание

\_\_\_\_\_ подпись, дата

\_\_\_\_\_ Бредихин Д.А.

\_\_\_\_\_ инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

\_\_\_\_\_ д.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_ должность, уч. степень, уч. звание

\_\_\_\_\_ подпись, дата

\_\_\_\_\_ Поплавский В.Б.

\_\_\_\_\_ инициалы, фамилия

Саратов 2026

**Введение.** Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций  $\Omega$  над ними, образует алгебру, называемую алгеброй отношений. Теория алгебр отношений является существенной составной частью современной алгебраической логики и общей алгебры. В математике и абстрактной алгебре алгебра отношений является булевой алгеброй, расширенной инволюцией, называемой обращением, которая является унарным оператором. Одним из примеров алгебры отношений является алгебра  $2^{X^2}$  всех бинарных отношений на множестве  $X$ , которое является подмножеством собственного декартова квадрата  $X^2$ . Под  $R \circ S$  понимается операция умножения бинарных отношений  $R$  и  $S$ ; в данной алгебре также вводится операция обращения множеств  $^{-1}$ . Начало алгебры отношений было положено в 1860 году Огастесом де Морганом. К своим идеям в алгебре логики Огастес де Морган пришёл независимо от Дж. Буля. В 1847 году он изложил элементы логики высказываний и логики классов, дав первую развитую систему алгебры отношений. С его именем связаны известные теоретико-множественные соотношения (так называемые законы де Моргана). Чарльз Пирс продолжил развитие математической логики, изложив общую теорию отношений и пропозициональных функций, в то время как де Морган внёс вклад в создание законов логики. Работы де Моргана и Пирса стали известны благодаря Эрнсту Шрёдеру, который опубликовал их научные исследования в третьем томе своей «Алгебры и логики», а также данные работы были расширены с помощью алгебраической логики, представленной Шрёдером.

Рассмотрение алгебр отношений в рамках аксиоматического подхода предполагает изучение их свойств, выразимых на языке логики первого порядка и, в частности, на языке квазитождеств, что естественно приводит к проблемам описания квазиэквациональных теорий различных классов алгебр отношений и нахождения их базисов квазитождеств. Особая роль квазитождеств при изучении алгебр отношений определяется тем обстоятельством, что абстрактные замыкания многих важных классов алгебр отношений образуют квазимногообразия, и в этом случае проблема базиса становится эквивалентной одной из центральных в теории алгебр отноше-

ний задач — отыскания элементарной характеристики (системы элементарных аксиом) этих классов.

Следующим этапом в развитии теории алгебр отношений являются исследования Альфреда Тарского и его учеников. На основе данных работ, начиная с 1940-х годов, была разработана основа абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр. Тарский сформулировал ключевые проблемы, определившие дальнейшее развитие теории, и предложил аксиоматический подход к изучению алгебр отношений. Этот подход предполагает анализ свойств алгебр отношений, выражаемых на языке логики предикатов и с использованием тождеств. Изучение тождеств алгебр отношений включает анализ разнообразных классов алгебр отношений и порождаемых ими многообразий. Множество всех тождеств, выполняющихся на алгебрах отношений из рассматриваемого класса, формирует эквациональную теорию этого класса. Эквациональная теория алгебр отношений была более детально рассмотрена в работе Д. А. Бредихина.

Алгебра отношений предоставляет набор математических операций для эффективного управления и обработки данных в системах с базами данных; реализация таких операций происходит на языке SQL. При этом алгебра отношений играет важную роль в области криптографии, где она используется для разработки и анализа криптографических протоколов, обеспечивая безопасность передачи данных и коммуникаций. Применение алгебры отношений в этой области помогает обнаруживать уязвимости, разрабатывать надёжные алгоритмы шифрования и дешифрования, а также анализировать и обеспечивать целостность систем безопасности. Таким образом, применение алгебры отношений играет ключевую роль в различных аспектах современной информационной технологии и науки, обеспечивая эффективное управление данными, разработку безопасных систем и обеспечение функциональности программ и алгоритмов.

В данной бакалаврской работе будут рассмотрены следующие разделы:

В первом разделе рассматриваются вводные понятия и представлены основные операции, используемые в работе. Далее приводятся основные определения алгебры отношений, бинарные отношения и их операции. По-

сле вводных определений конструируется алгебра термов вместе со своими определениями и операциями. В конце первого раздела вводятся определения универсальных алгебр и формулируется основная теорема этого раздела, называемая теоремой Биркгофа.

Второй раздел данной работы носит реферативный характер и основывается на работах Д. А. Бредихина «Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями» [3]. В данном разделе рассматриваются эквациональные теоремы алгебр отношений, формулируется основная теорема и её следствия с доказательствами, основанными на работах Д. А. Бредихина. Представляются определения двухполюсников, рассматриваются операции над ними и приводится их графическая интерпретация в виде графов.

Третий раздел содержит рассмотрение алгебр отношений с одной бинарной операцией, классификацию конъюнктивных операций рангов 7 и 8, определение ранга конъюнктивных операций, графическую визуализацию конъюнктивных операций, а также код программы на языке Python, который строит по двум заданным конъюнктивным операциям группоид для проверки на нём заданных тождеств и квазитожеств. Будет проведена проверка 14 алгебраических свойств для 4 классов операций ранга 7 и 1 класса операций ранга 8 с учётом симметрий двойственности, обращения и сопряжения.

**Основное содержание работы.** В основе исследования лежит построение вычислимой математической модели бинарных отношений, замкнутых относительно заданной сигнатуры операций. Для формализации процесса необходимо определить дискретные структуры и непрерывные пространства представлений, в которых оперирует алгебра.

**Определение 1.** *Бинарным отношением на множестве  $U$  называется любое подмножество декартова квадрата  $U^2$ . Множество всех таких отношений обозначается как  $\text{Rel}(U)$ . Отношение называется рефлексивным, симметричным, транзитивным или антисимметричным в зависимости от выполнения стандартных аксиом замыкания.*

Для перехода от отдельных отношений к системам, в которых они взаимодействуют, требуется ввести алгебраическую структуру, описывающую правило композиции. В качестве базовой системы рассматривается группоид, позволяющий формализовать процесс последовательного применения операций.

**Определение 2.** *Группоидом называется алгебра  $(A, \cdot)$  с одной бинарной операцией, где  $A$  — непустое множество, а операция  $\cdot$  задаёт правило отображения  $A \times A \rightarrow A$ . Упорядоченным группоидом  $(A, \cdot, \leq)$  называется группоид с отношением порядка, согласованным с операцией:  $x \leq y \Rightarrow z \cdot x \leq z \cdot y \wedge x \cdot z \leq y \cdot z$ .*

Анализ свойств порождаемых группоидных структур невозможен без аппарата, описывающего классы алгебр, замкнутые относительно определённых операций. В этом контексте фундаментальную роль играет теорема, устанавливающая структурную характеристику многообразий универсальных алгебр.

**Определение 3.** *Операция над отношениями называется конъюнктивной, если она задаётся формулой исчисления предикатов первого порядка, содержащей в пренексной нормальной форме только операции конъюнкции атомарных предикатов.*

Абстрактное логическое определение конъюнктивных операций, хотя и строго, оказывается неудобным для непосредственного анализа высоких рангов из-за экспоненциального роста сложности формул. Для преодоления этой трудности требуется формализовать алгебраический контекст, в котором изучаются данные операции, и ввести аппарат, описывающий замкнутость классов относительно заданных сигнатур.

**Определение 4.** *Алгеброй отношений называется пара  $(\Phi, \Omega)$ , где  $\Phi$  — некоторое множество бинарных отношений, замкнутое относительно совокупности операций  $\Omega$ . Совокупность всех тождеств, которым удовлетворяют все алгебры из класса  $K$ , называется эквациональной теорией класса  $K$  и обозначается как  $\text{Eq}(K)$ .*

Понятие эквациональной теории позволяет строго описать классы алгебр, порождаемых заданными системами тождеств. Однако для конструктивного построения операций высокого ранга и их последующей классификации требуется переход от абстрактных логических формул к геометрическим структурам, а также формализация правил их комбинаторной сборки.

При систематизации конъюнктивных операций высокого ранга возникает необходимость учёта их симметричных свойств, позволяющих сводить структурно разнородные конструкции к единым классам эквивалентности. Формализация этих преобразований осуществляется через введение операций двойственности, обращения и сопряжения, которые задают естественные преобразования на множестве бинарных отношений.

**Определение 5.** *Операция  $F^d(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$  называется двойственной к операции  $F$ . Абстрактные свойства этих операций двойственны друг другу, что позволяет в рамках классификации исследовать лишь одного представителя из каждой пары.*

**Определение 6.** *Операция  $F^c(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2^{-1}, \rho_1^{-1})$ , где  $^{-1}$  — операция взятия обратного отношения, называется обратной к операции  $F$ .*

**Определение 7.** *Операция  $F^f(\rho_1, \rho_2) = (F(\rho_2^{-1}, \rho_1^{-1}))^{-1}$  называется сопряжённой к операции  $F$ . Заметим, что справедливо равенство  $F^f = F^{cd} = F^{dc}$ .*

С алгебраической точки зрения, переход к сопряжённым и обратным операциям имеет естественную геометрическую интерпретацию в терминах графовых моделей. Инвертирование соответствующего графа может быть осуществлено двумя эквивалентными способами:

1. Поменять вход (in) и выход (out) у соответствующего графа местами;
2. Поменять направление стрелок у дуг на противоположные, т.е. если дуга начиналась на входе, а заканчивалась на выходе, то при развороте направление меняется на обратное.

Указанные преобразования сохраняют эквациональную структуру группоидов и позволяют существенно сократить объём вычислительных

экспериментов при проверке тождеств. Для строгой связи между алгебраическими тождествами и графовыми структурами вводится аппарат двухполюсников, заменяющий логические формулы на конечные комбинаторные объекты.

**Определение 8.** *Двухполюсником называется помеченный ориентированный граф  $G = (V, E, \text{in}, \text{out})$ , где  $V$  — множество вершин,  $E \subset V \times \mathbb{N} \times V$  — множество помеченных дуг, а  $\text{in}, \text{out} \in V$  — выделенные вершины входа и выхода.*

Введённый аппарат позволяет перевести алгебраические задачи в язык теории графов. Однако статическое описание отдельных графов недостаточно для анализа операций рангов 7 и 8, поскольку их структура формируется путём последовательной сборки базовых компонентов. Данный процесс формализуется через операцию композиции двухполюсников.

**Определение 9.** *Композицией двухполюсника  $G = (V, E, \text{in}, \text{out})$  и набора двухполюсников  $G_1, \dots, G_m$  называется новый двухполюсник  $G(G_1, \dots, G_m)$ , получаемый заменой каждого ребра с меткой  $k$  в графе  $G$  на соответствующий двухполюсник  $G_k$  с отождествлением вершин входа и выхода.*

Данный конструктивный механизм является фундаментальным для анализа рангов 7 и 8, поскольку позволяет декомпозировать сложные высокоарные операции на базовые графовые компоненты меньшего ранга. При этом проверка алгебраических свойств порождаемых группоидов выходит за рамки обычных тождеств и требует расширения аппарата на квазитождества, учитывающие отношения порядка.

Далее будут рассмотрены алгебры отношений с одной бинарной операцией, т.е. группоиды, а также группоиды с заданными отношениями порядка. Операция группоида применяется к двум его элементам, отсюда и следует название «бинарная операция». Каждой такой операции над любыми двумя элементами из множества ставится в соответствие некоторый результат операции. Такие операции обычно задаются логическими формулами первого порядка, поэтому их также называют логическими операциями.

Логические операции классифицируются в зависимости от вида определяющих их формул. Операция называется примитивно-позитивной (или диофантовой), если она может быть задана формулой исчисления предикатов первого порядка, содержащей исключительно кванторы существования и операции конъюнкции. В случае, когда операция определяется формулой без кванторов существования, состоящей лишь из конъюнкции атомарных предикатов, она называется конъюнктивной.

В качестве простейшего примера конъюнктивной операции можно привести пересечение двух множеств, задаваемое формулой  $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ . Здесь в качестве атомов выступают элементарные условия  $x \in A$  и  $x \in B$ , объединённые символом конъюнкции  $\wedge$ . Однако данный пример относится к унарным отношениям (подмножествам). В случае бинарных отношений, элементами которых являются упорядоченные пары, структура формул и соответствующих им графовых моделей существенно усложняется.

В настоящей работе рассматриваются исключительно бинарные конъюнктивные операции над бинарными отношениями; под «отношениями» всюду подразумеваются элементы множества  $\text{Rel}(U)$ . Для произвольной формулы исчисления предикатов первого порядка вида  $\phi(x_1, x_2, r_1, r_2)$ , где  $x_1, x_2$  — свободные индивидуальные переменные, а  $r_1, r_2$  — бинарные предикатные символы, соответствующая операция  $F$  на множестве  $\text{Rel}(U)$  задаётся следующим образом:

$$F(\rho_1, \rho_2) = \{(u, v) \in U^2 \mid \phi(u, v, \rho_1, \rho_2)\},$$

где запись  $\phi(u, v, \rho_1, \rho_2)$  означает, что формула  $\phi$  истинна при интерпретации свободных переменных  $x_1, x_2$  как элементов  $u, v \in U$ , а предикатных символов  $r_1, r_2$  — как отношений  $\rho_1, \rho_2 \in \text{Rel}(U)$ .

Примитивно-позитивная операция  $F$  имеет ранг  $k$ , если она может быть определена формулой, содержащей ровно  $k$  конъюнктивных атомов, и не может быть задана формулой с меньшим числом таких элементов. В рамках данного исследования фокус смещается на операции высоких рангов  $k = 7$  и  $k = 8$ . При таких значениях ранга прямое ручное перечис-

ление всех возможных структур становится непрактичным из-за экспоненциального роста комбинаторной сложности, что требует применения алгоритмических методов классификации и анализа репрезентативных классов двухполюсников, покрывающих основные топологические типы конъюнктивных операций. Напомним определение группоида:

**Определение 10.** *Группоидом называется алгебра с одной бинарной операцией вида  $(A, \cdot)$ , где  $A$  - непустое множество, а под бинарной операцией  $\cdot$  понимается правило, по которому можно найти результат операции для любых двух элементов из  $A$ .*

Теперь дадим основные определения:

**Определение 11.** *Операция называется конъюнктивной, если она может быть определена формулой первого порядка, содержащая в своей пренексной нормальной форме только операции конъюнкции.*

**Определение 12.** *Операция  $F^d(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$  называется двойственной к операции  $F$ .*

Абстрактные свойства этих операций двойственны друг другу. По этой причине мы рассмотрим только одну из этих операций.

**Определение 13.** *Операция  $F^c(\rho_1, \rho_2) = (F(\rho_2^{-1}, \rho_1^{-1}))$ , где  $^{-1}$  - операция взятия обратного отношения, называется обратной к операции  $F$ .*

**Определение 14.** *Операция  $F^f(\rho_1, \rho_2) = (F(\rho_2^{-1}, \rho_1^{-1}))^{-1}$  называется сопряженной к операции  $F$ . Заметим, что  $F^f = F^{cd} = F^{dc}$ .*

Напомним, что инвертированный граф можно получить только двумя способами:

1. Поменять вход (in) и выход (out) у соответствующего графа местами;
2. Поменять направление стрелок у дуг на противоположные, т.е. если дуга начиналась на входе (in), а заканчивалась на выходе (out), то при развороте всё будет наоборот.

Стоит отметить, что отображение  $f(\rho) = \rho^{-1}$  является изоморфизмом группоидов  $\text{Rel}(F)$  и  $\text{Rel}(F^f)$ , а так же изоморфизмом группоидов  $\text{Rel}(F^c)$  и  $\text{Rel}(F^d)$ . При классификации конъюнктивных операций мы их будем объединять в классы, состоящие из этих двухполюсников, располагая их в матрице следующего вида:

$F$	$F^d$
$F^f$	$F^c$

Обозначение класса

Количество операций в этом классе зависит от того, являются ли они сопряженными и обратными. Некоторые операции не имеют сопряженных и обратных, поэтому в классах может быть присутствовать символ “—”, что означает, что граф совпадает с графом, который находится выше (или напротив него в зависимости от знака “=”).

В данной работе, посвященной свойствам конъюнктивных операций над бинарными отношениями высоких рангов, практическая часть включает в себя реализацию алгоритма, позволяющего исследовать выполнение четырнадцати алгебраических тождеств и квазитожеств (ассоциативность, коммутативность, псевдо-идемпотентность, псевдо-коммутативность, псевдо-ассоциативность, коммутативность квадратов, свойства поглощения и три квазитожества с отношением порядка) для 4 классов группоидов ранга 7 и 1 класса ранга 8, заданных парами 4-битных матриц операций, представляющих собой битовые маски ориентированных графов.

Для этого был разработан код на языке Python, использующий встроенные функции форматирования для перевода чисел в двоичное представление, целочисленные операции для обратного преобразования и многоуровневую систему вложенных циклов для перебора всех комбинаций элементов таблицы Кэли размером  $16 \times 16$ .

В качестве входных данных выступают четырёхбитные списки  $A$  и  $B$  (маски графов) для каждого из 5 классов (4 класса ранга 7:  $C_1 + D_1$ ,  $C_2 + D_1$ ,  $C_3 + D_1$ ,  $C_3^* + D_1$  и 1 класс ранга 8:  $D_1 + D_1$ ), определяющие правило вычисления результата операции, а также четырнадцать функций проверки тождеств и квазитожеств, каждая из которых реализует соответствующее алгебраическое соотношение.

Далее выполняются следующие действия:

1. Реализованы функции прямого и обратного преобразования между десятичными числами (от 0 до 15) и их четырёхбитным двоичным представлением.
2. Вспомогательная функция разбивает четырёхбитную строку на две двухбитовые подстроки. Другая вспомогательная функция проверяет, совпадают ли единичные биты матрицы  $A$  с соответствующими битами разбитого аргумента, используя два индекса для доступа к подстрокам.
3. Основная функция построения таблицы Кэли размером  $16 \times 16$  для заданной пары матриц операций выполняет следующие шаги для каждой пары элементов  $(i, j)$ :
  - 3.1 Переводит  $i$  и  $j$  в четырёхбитные двоичные строки;
  - 3.2 Разбивает каждую из них на две двухбитовые части;
  - 3.3 Для четырёх возможных комбинаций индексов вычисляет два логических условия, сравнивая биты матриц с соответствующими подстроками;
  - 3.4 Формирует четырёхбитный вектор результата, устанавливая бит в единицу, если оба условия истинны, и в ноль в противном случае;
  - 3.5 Преобразует полученный вектор в десятичное число и сохраняет его в ячейку таблицы.
4. Для каждого из 5 классов строится таблица Кэли, после чего последовательно вызываются четырнадцать функций проверки тождеств и квазитожеств. Каждая такая функция перебирает все возможные значения переменных и сравнивает левую и правую части соответствующего алгебраического уравнения или импликации.

5. Дополнительно строится матрица порядка размером  $16 \times 16$ , представляющая собой отношение включения между бинарными отношениями. Данная матрица изоморфна 4-мерному булеву кубу и используется для проверки тождеств с отношением порядка (поглощение) и квазитожеств.
6. Результаты выводятся в двух форматах: подробный — для каждого класса отдельно с указанием используемых масок  $A$  и  $B$  и символами «+» (тождество выполняется) или «-» (не выполняется). Сводная таблица — все 5 классов в виде строк с результатами четырнадцати проверок.
7. В конце программы приводится расшифровка каждого из четырнадцати тождеств и квазитожеств с их словесным описанием и алгебраической записью.

**Заключение.** Данная работа посвящена изучению свойств конъюнктивных операций над бинарными отношениями. А именно, классификации конъюнктивных операций рангов 7 и 8. Для достижения поставленной цели использовались методы описания эквациональных теорий классов алгебр отношений с помощью двухполюсных графов.

Данная работа разделена на три раздела. В первом разделе приводятся основные определения и обозначения, связанные с алгеброй отношений, алгеброй термов, примитивно-позитивными и конъюнктивными операциями. Рассматриваются основные понятия общей алгебры, так же были приведены некоторые определения и обозначения общего характера.

Второй раздел имеет реферативный характер. В нём приведено понятие примитивно-позитивной операции над отношениями и рассмотрено представление диофантовых операций с помощью графов. А также приводятся, полученные в статье Д.А. Бредихина «Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями» [3] и результаты.

В третьем разделе приводятся результаты, полученные в ходе самостоятельной работы. Были классифицированы конъюнктивные операции рангов 7 и 8, их графическая интерпретация в виде двухполюсных графов. Создана программа на языке программирования Python, которая строит таблицы Кэли для группоидов для проверки тождеств и матрицу порядка

для проверки квазитождеств и тождеств с порядком. Проверка выполнялась над основной операцией классов и двойственной операции классов. Была приведена таблица с результатами проверки.