

МИНОБРНАУКИРОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра _____ геометрии _____

Классификация компактных ориентированных поверхностей

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента _____ 4 _____ курса _____ 421 _____ группы

направление _____ 02.03.01—Математика и компьютерные науки _____
код и наименование направления

_____ механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

_____ Дружина Вадима Александровича _____
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, д.ф.-м.наук _____
должность,уч.степень,уч. звание

_____ подпись, дата

_____ В.Б. Поплавский _____
инициалы, фамилия

Зав.кафедрой, д.ф.-м. наук, доцент _____
должность,уч.степень,уч. звание

_____ подпись, дата

_____ В.Б. Поплавский _____
инициалы, фамилия

Саратов 2026

Введение. Компактные ориентированные поверхности представляют собой важный объект изучения в топологии и геометрии. Они являются двумерными многообразиями, которые обладают свойством компактности и ориентируемости, что делает их интересными как с теоретической, так и с практической точки зрения. В данной работе я рассмотрел основные аспекты классификации таких поверхностей, включая их топологические свойства, методы классификации и примеры.

Актуальность темы. Классификация компактных ориентированных поверхностей имеет большое значение в различных областях математики, включая алгебраическую геометрию, дифференциальную геометрию и теорию гомотопий. Понимание структуры этих поверхностей позволяет решать более сложные задачи, связанные с их топологией и геометрией. Кроме того, компактные ориентированные поверхности находят применение в физике, например, в теории струн и в моделировании различных физических систем.

Цели и задачи исследования.

Целью данной работы является систематизация знаний о компактных ориентированных поверхностях и их классификации. Для достижения этой цели я поставил перед собой следующие задачи:

Изучить основные определения и свойства компактных ориентированных поверхностей.

Рассмотреть методы классификации, включая использование характеристических классов и теоремы о классификации.

Привести примеры различных типов компактных ориентированных поверхностей, таких как сфера, тор и поверхности высших порядков.

Обсудить приложения теории классификации в других областях математики и науки.

Структура работы: работа состоит из нескольких разделов. В первом разделе я рассмотрим основные определения и свойства n -многообразий ориентированных поверхностей. Во втором разделе будет представлена классификация этих поверхностей с использованием различных методов. Третий раздел будет посвящен примерам и приложениям, где я проиллюстрировал полученные результаты. В заключении я подвел итоги и обсудил перспективы дальнейших исследований в данной области.

Таким образом, данная работа направлена на углубленное понимание компактных ориентированных поверхностей и их классификации, что является важным шагом в изучении топологии и геометрии.

Основное содержание работы. Связное 2-многообразие буду называть для краткости поверхностью. Простейшим примером компактной поверхности служит 2-сфера S^2 ; другой важный пример-тор. Грубо говоря, тор-это любая поверхность, гомеоморфная поверхности бублика или массивного кольца. Точнее его можно определить несколькими способами, например следующими:

Любое топологическое пространство, гомеоморфное произведению двух окружностей $S^1 \times S^1$.

Любое топологическое пространство, гомеоморфное подмножеству $(x, y, z) \in R^3 : [(x^2 + y^2)^{1/2} - 2]^2 + z^2 = 1$ пространства R^3 . Это множество получается вращением окружности $(x - 2)^2 + z^2 = 1$ в плоскости xz вокруг оси z .

Пусть X единичный квадрат в плоскости R^2 : $(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Тогда тором будет любое пространство, гомеоморфное факторпространству пространства X , полученному отождествлением противоположных сторон квадрата X согласно следующим правилам. Точки $(0, y)$ и $(1, y)$ отождествляются для $0 \leq y \leq 1$, а точки $(x, 0)$ и $(x, 1)$ - для $0 \leq x \leq 1$.

В качестве другого примера компактной поверхности рассмотрим действительную проективную плоскость (для краткости называемую проективной плоскостью). Это компактная неориентируемая поверхность. Так как она не гомеоморфна никакому подмножеству евклидова 3-пространства, то представить себе проективную плоскость намного труднее, чем 2-сферу или тор.

Определение 1. Факторпространство 2-сферы S^2 , получаемое отождествлением каждой пары диаметрально противоположных точек, называется проективной плоскостью. Любое пространство, гомеоморфное этому пространству, мы также будем называть проективной плоскостью.

Теорема 1. Любая компактная поверхность гомеоморфна либо сфере, либо связной сумме торов, либо связной сумме проективных плоскостей.

В качестве подготовки доказательства опишу так называемую "каноническую форму" для связной суммы торов или проективных плоскостей. Представление тора как квадрата с отождествленными противоположными сторонами. Аналогичное представление связной суммы двух торов можно получить следующим образом.

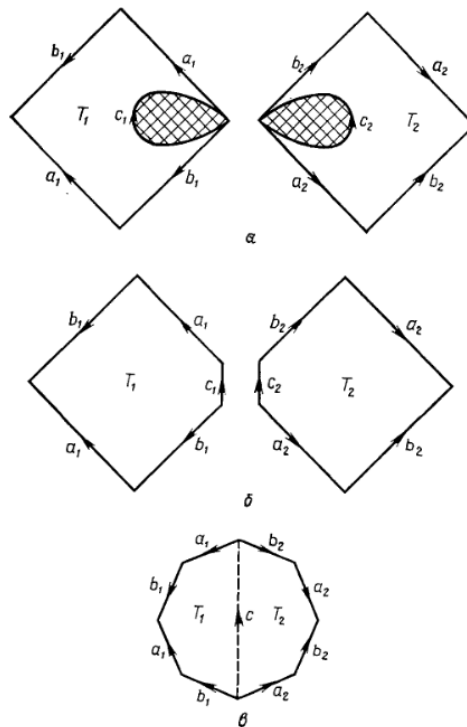


Рисунок 1 — а-два непересекающихся тора T_1 и T_2 ; б-непересекающиеся торы с вырезанными областями; в-после склеивания

Каждый из торов T_1 и T_2 представим в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами, как показано на рис. 1, а. Все четыре вершины каждого квадрата отождествляются с единственной точкой соответствующего тора. Чтобы образовать связную сумму торов, сначала надо вырезать круглую дыру в каждом из них, и сделать это можно любым способом. Удобно вырезать области, заштрихованные на диаграммах. Границы дыр обозначены c_1, c_2 и их отождествление указано стрелками. Дополнение к дырам в этих двух торах также можно представить в виде многоугольников на рис. 1, б, поскольку при указанном отождествлении края две граничные точки отрезка $c_i, i = 1, 2$, также отождествляются. Отождествляя далее отрезки 1 и 2, получаем восьмиугольник на рис. 1, в, в котором стороны попарно отождествлены. Заметим, что все восемь вершин этого восьмиугольника

отождествляются с единственной точкой в $T_1 \# T_2$. Этот восьмиугольник с попарно отождествленными сторонами и является "канонической формой" связной суммы двух торов.

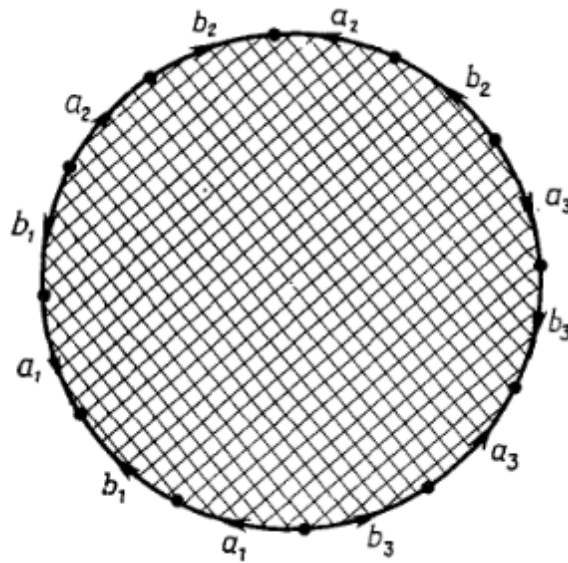


Рисунок 2 — Связанная сумма трех торов получается попарным отождествлением сторон двенадцатиугольника

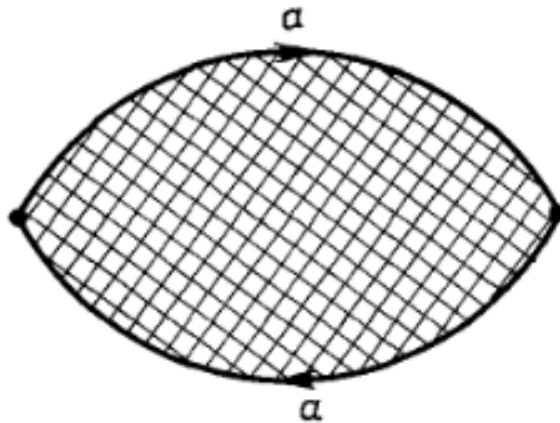


Рисунок 3 — Проективная плоскость получается в результате отождествления краев друугольника

Повторяя рассуждения, что связной суммой трех торов будет факторпространство, получаемое из двенадцатиугольника на рис. 2 отождествлением сторон, обозначенных одними и теми же буквами. Теперь должно быть ясно, как по индукции доказать, что связная сумма и торов гомеоморфна Факторпространству, полученному из $4n$ -угольника попарным отождествлением сто-

рон по некоторому правилу, точное описание которого оставляем читателю. Итак, я показали, как представить каждую из компактных поверхностей, о которых шла речь в теореме 1, в виде факторпространства многоугольника с попарно отождествленными сторонами. Теперь опишем довольно очевидный и удобный способ обозначения того, какие именно стороны должны отождествляться в таком многоугольнике. Рассмотрим диаграмму, указывающую, как происходит отождествление сторон; начиная с определенной вершины, будем двигаться вдоль границы многоугольника, последовательно обозначая его стороны буквами. Если направление стрелки на стороне совпадает с направлением нашего движения, то этой стороне припишем букву без степени (или со степенью +1). Если же стрелка на стороне указывает направление, противоположное нашему, то этой стороне припишем букву со степенью -1.

Например, отождествления на рис. 2 точно указываются символами

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} b_3^{-1}$$

В каждом случае мы начинали двигаться от нижней вершины диаграммы и обходили границу против часовой стрелки. Ясно, что такое обозначение указывает отождествление однозначно; с другой стороны, написав символ, соответствующий данной диаграмме, можно начать движение из любой вершины и двигаться вдоль границы как по, так и против часовой стрелки.

Подведу итоги выписав символы, соответствующие каждой из поверхностей в теореме 1: (а) сфера: aa^{-1} . (б) связная сумма и торов: $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$ (в) связная сумма и проективных плоскостей: $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$

Ориентируемость. Говорят, что n -симплекс, $n = 0, 1, 2$, на многообразии M ориентирован, если для его $n + 1$ вершин установлен определенный порядок. Два порядка вершин определяют одну и ту же ориентацию в s^n , если один порядок может быть получен из другого четной подстановкой множества его вершин. Если $n > 0$, то симплекс s^n имеет две возможные ориентации; обозначим симплекс с одной ориентацией через s^n , тогда симплекс с противоположной ориентацией следует обозначить через $-s^n$. Например, 1-симплекс с вершинами P_0 и P_1 имеет две ориентации $\langle P_0, P_1 \rangle$ и $\langle P_1, P_0 \rangle$, где я использую скобки $\langle \rangle$ для обозначения симплекса, вершины которого имеют порядок, указанный в скобках. 2-симплекс с вершинами P_0, P_1, P_2 имеет две

ориентации

$$\langle P_0, P_1, P_2 \rangle = \langle P_1, P_2, P_0 \rangle = \langle P_2, P_0, P_1 \rangle$$

и

$$\langle P_2, P_1, P_0 \rangle = \langle P_1, P_0, P_2 \rangle = \langle P_0, P_2, P_1 \rangle$$

Для удобства я буду также говорить, что 0-симплекс с одной вершиной P_0 имеет две ориентации, обозначаемые $\langle P_0 \rangle$ и $-\langle P_0 \rangle$

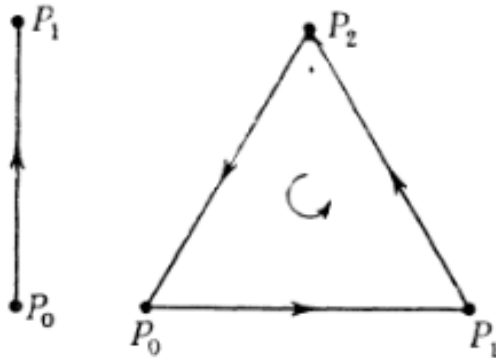


Рисунок 4

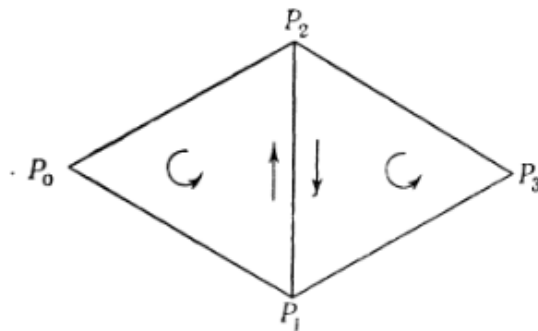


Рисунок 5

Как видно из (Рисунок 4), ориентация 2-симплекса индуцирует ориентацию на каждом 1-симплексе, являющемся его стороной. Например, ориентация $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ индуцирует ориентации $\langle P_0, P_1 \rangle$, $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_2, P_0 \rangle$ на трех его сторонах. Два примыкающих треугольника называются когерентно ориентированными, если они индуцируют противоположные ориентации на их общей стороне (Рисунок 5).

Простая цепь треугольников $s_1^2, s_2^2, \dots, s_n^2$, $n > 2$ называется замкнутой, если s_1^2 и s_n^2 имеют общую сторону. Говорят, что замкнутая цепь треугольников когерентно ориентирована, если каждый треугольник ориентирован

так, что любая пара прилегающих треугольников имеет когерентную ориентацию. Многообразие является ориентируемым, если каждая простая замкнутая цепь треугольников на многообразии может быть когерентно ориентирована. В противном случае многообразие называется неориентируемым. Сфера, плоскость и квадрат дают примеры ориентируемых многообразий. В действительности, каждая риманова поверхность ориентируема.

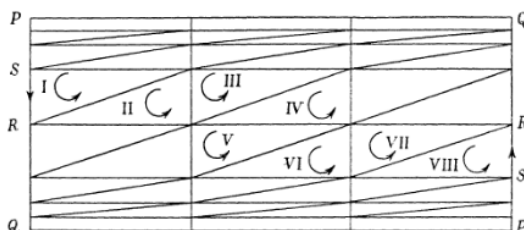


Рисунок 6

Теорема 2. Когерентная ориентация в барицентрическом подразделении двух прилегающих треугольников определяет когерентную ориентацию в исходных двух треугольниках.

Теорема 3. Для односвязной области G гомотопический класс в $G - Q$, содержащий кривую C , характеризуется величиной $\circ(Q, C)$, так что $C \approx C'$ в $G - Q$ в том и только в том случае, когда $\circ(Q, C) = \circ(Q, C')$.

Теорема 4. Всякая риманова поверхность ориентируема.

Возвратимся теперь к случаю произвольной поверхности S с заданной триангуляцией Δ .

Теорема 5. Если поверхность S ориентируема, то можно приписать ориентацию каждому треугольнику из Δ таким образом, чтобы всякая пара прилегающих треугольников оказалась когерентно ориентированной.

Теорема 6. На всяком многообразии M , которое является одновременно триангулируемым и ориентируемым, можно определить аналитическую структуру, превращающую M в риманову поверхность).

Также я написал программу которая вычисляет нормальную форму по заданной триангуляции. Пояснение кода: Структуры Point и Triangle: Point используется для определения координат точек в пространстве.

Triangle содержит три точки и метод `normal()` для вычисления нормали.

Метод `normal()`: Вычисляет нормаль треугольника с использованием векторного произведения векторов, созданных из его вершин. Нормаль затем нормализуется (систематически приводит к единичному вектору).

Основная функция: Создаётся вектор треугольников с заданными вершинами.

Для каждого треугольника вычисляется нормаль и выводится на экран.

Замечания:

Программа рассчитана на простейшие варианты треугольников в 3D пространстве. В зависимости от нужд, её можно расширить, добавив функционал для работы с более сложными ситуациями и различными нормальными формами.

Заключение. В ходе исследования я рассмотрели основные аспекты классификации компактных ориентированных поверхностей, что позволило глубже понять их топологические свойства и структуру. Компактные ориентированные поверхности, такие как сфера, тор и поверхности высших порядков, представляют собой важные объекты в математике, обладающие уникальными характеристиками и свойствами.

Я проанализировал методы классификации, включая использование характеристических классов и теоремы о классификации, что дало возможность систематизировать знания в данной области. Эти методы не только помогают в теоретическом понимании, но и находят практическое применение в различных областях науки, таких как физика и компьютерная графика.

В результате моего исследования я пришел к выводу, что классификация компактных ориентированных поверхностей является не только важной задачей в топологии, но и имеет широкие перспективы для дальнейших исследований. Понимание структуры этих поверхностей открывает новые горизонты для решения сложных задач, связанных с их геометрией и топологией.

Таким образом, данная работа подчеркивает значимость изучения компактных ориентированных поверхностей и их классификации, что является важным шагом в развитии современных математических теорий и приложений. Я надеюсь, что результаты моего исследования будут полезны как для

дальнейших теоретических изысканий, так и для практического применения в различных научных областях.