МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

«КОНФОКАЛЬНЫЕ КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ»

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Вакина Вадима Константиновича

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ____________________ Новиков В.Е.

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент ____________________ Поплавский В.Б.

Саратов 2026

Введение. Конические сечения — эллипс, гипербола и парабола — являются одними из фундаментальных объектов классической геометрии, играющими важную роль в развитии различных разделов математики. Их изучение позволяет объединить геометрические и аналитические подходы к исследованию кривых, а также служит основой для решения широкого круга задач в математике и физике.

Интерес к коническим сечениям возник ещё в античные времена и не утратил своей актуальности до настоящего времени. С развитием аналитической геометрии и математического анализа теория коник получила дальнейшее развитие и стала важным инструментом в исследовании механических, оптических и физических процессов.

Особое место в данной теории занимают конфокальные конические сечения — семейства кривых второго порядка, имеющих общую пару фокусов. Их изучение позволяет глубже понять геометрические свойства коник, а также установить важные связи с такими разделами математики, как дифференциальная геометрия и математическая физика.

Актуальность темы обусловлена широким применением конфокальных конических сечений в теоретических и прикладных задачах, в частности при решении дифференциальных уравнений и моделировании физических процессов. Изучение их свойств необходимо для более глубокого понимания методов решения дифференциальных уравнений и анализа геометрических структур.

Теоретическое значение работы заключается в систематизации знаний о конфокальных конических сечениях и их свойствах. Практическое значение определяется возможностью применения полученных результатов при решении задач математической физики и смежных дисциплин.

Целью работы является исследование конфокальных конических сечений, их основных свойств и приложений.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. изучение основных свойств конических сечений;
2. вывод их канонических уравнений;
3. исследование конфокальных семейств кривых;
4. анализ геометрических свойств, включая ортогональность;

5. изучение эллиптических координат;
6. рассмотрение приложений в задачах математической физики.

Объектом исследования являются конические сечения. Предметом исследования выступают конфокальные семейства конических сечений, их свойства и приложения.

Теоретической основой работы послужили материалы по аналитической геометрии, математическому анализу и математической физике. В работе используются методы аналитической геометрии, дифференциального исчисления и математического моделирования.

Структура работы обусловлена целью и задачами исследования. Работа состоит из введения, основной части, заключения и списка литературы. В основной части рассматриваются теоретические основы конических сечений, исследуются конфокальные семейства и их свойства, а также приводятся примеры применения полученных результатов.

Основное содержание работы.

Определение 1 (Круговой конус)**.** Круговым конусом называется объединение семейства прямых в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, образующих фиксированный угол $\alpha \in (0, \pi/2)$ с некоторой фиксированной прямой ℓ (осью конуса) и проходящих через фиксированную точку $O \in \ell$ (вершину конуса). Прямые, принадлежащие поверхности конуса, называются его образующими.

Теорема 2 Сечение кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, является эллипсом, гиперболой или параболой.

Определение 3 (Эллипс)**.** Эллипсом называется геометрическое место точек M на плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 постоянна и больше $|F_1F_2|$:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a, \quad \text{где } 2a > |F_1F_2| > 0.$$

Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса. Расстояние $|F_1F_2| = 2c$ ($c \geq 0$) называется фокусным расстоянием. Число $a > 0$ называется большой полуосью эллипса.

Определение 4 (Гипербола)**.** Гиперболой называется геометрическое место точек M на плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек $F_1 \neq F_2$ постоянен:

$$\big||MF_1| - |MF_2|\big| = 2a, \quad \text{где } 0 < 2a < |F_1F_2|.$$

Точки F_1, F_2 называются фокусами гиперболы, число $c = \frac{|F_1F_2|}{2}$ — фокусным расстоянием, a — действительной полуосью. Гипербола состоит из двух ветвей.

Определение 5 (Парабола)**.** Параболой называется геометрическое место точек M на плоскости, равноудалённых от фиксированной точки F (фокуса) и от фиксированной прямой d (директрисы), причём $F \notin d$:

$$|MF| = |MH|,$$

где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису d. Расстояние от фокуса до директрисы равно $p > 0$.

Определение 6 (Эксцентриситет)**.** Эксцентриситетом конического сечения называется число $e = c/a$. При этом: $0 \leq e < 1$ — эллипс; $e = 1$ — парабола; $e > 1$ — гипербола.

Теорема 11 (Оптическое свойство эллипса)**.** Касательная к эллипсу в произвольной точке P образует равные углы с отрезками PF_1 и PF_2, соединяющими точку касания с фокусами. Иными словами, касательная является биссектрисой внешнего угла треугольника PF_1F_2.

Теорема 14 Касательная к гиперболе в точке P является биссектрисой угла $\angle F_1PF_2$. Следствием этого является то, что луч, направленный к одному фокусу и отражённый от ветви гиперболы, продолжается в направлении другого фокуса.

Теорема 8 (Оси симметрии эллипса)**.** Эллипс с попарно различными фокусами $F_1 \neq F_2$ имеет ровно две оси симметрии: прямую F_1F_2 (большую ось) и серединный перпендикуляр к отрезку F_1F_2 (малую ось). Первая ось пересекает эллипс в вершинах $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, вторая — в точках $B_1 = (0, b)$, $B_2 = (0, -b)$, где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Теорема 10 (Фокально-директрисное определение коник)**.** Пусть F — точка (фокус) и d — прямая (директриса), причём $F \notin d$. Геометрическое место точек M, для которых $|MF|/\rho(M, d) = e = \text{const}$, является: эллипсом при $0 < e < 1$; параболой при $e = 1$; гиперболой при $e > 1$. Данная теорема устанавливает единый подход ко всем трём кривым через параметр e. Для эллипса директрисы расположены на расстоянии $a/e = a^2/c$ от центра (по обе стороны). Для гиперболы — аналогично. Для параболы директриса одна и перпендикулярна оси симметрии.

Теорема 18 (Параметрическое задание эллипса)**.** Точка $(x, y) = (a\cos\varphi,\, b\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, пробегает эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Площадь эллипса равна $S = \pi ab$. Для конфокальных эллипсов с параметром λ площадь возрастает: $S(\lambda) = \pi\sqrt{a^2 + \lambda} \cdot \sqrt{b^2 + \lambda}$.

Теорема 17. Аналитическое определение эллипса и геометрическое определение эквивалентны при $c^2 = a^2 - b^2$.

Теорема 21 Аналитическое и геометрическое определения гиперболы эквивалентны при $c^2 = a^2 + b^2$.

Теорема 23 Аналитическое и геометрическое определения параболы эквивалентны.

Определение 16 Эллипс в декартовой системе координат задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0,$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — фокусное расстояние.

Определение 20 Гипербола задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0,$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, асимптоты: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Определение 22 Парабола задаётся уравнением $y^2 = 2px$, $p > 0$, где фокус имеет координаты $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Определение 24 (Конфокальные конические сечения)**.** Два конических сечения (эллипсы или гиперболы) называются конфокальными, если их фокусы совпадают.

Пусть зафиксированы фокусы $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $c > 0$. Семейство конфокальных коник параметризуется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1, \quad a^2 > b^2 > 0,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ — параметр. При $\lambda > -b^2$ получаются эллипсы, при $-a^2 < \lambda < -b^2$ — гиперболы.

Замечание 25 Фокусное расстояние $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ не зависит от параметра λ, что и выражает свойство конфокальности: все кривые семейства имеют одни и те же фокусы $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$.

Теорема 26 (Инвариантность фокусов)**.** Для всех кривых семейства фокусы совпадают и равны $(\pm c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Теорема 27 (Заполнение плоскости)**.** Через каждую точку плоскости (в общем положении) проходит ровно один эллипс и одна гипербола конфокального семейства.

Его дискриминант положителен для точек в общем положении, поэтому получаются два различных вещественных корня $\lambda_1 > -b^2$ (эллипс) и $\lambda_2 \in (-a^2, -b^2)$ (гипербола).

Теорема 33 (Ортогональность конфокальных систем)**.** Конфокальные эллипсы и гиперболы пересекаются под прямым углом в каждой точке их пересечения.

Замечание 34 Ортогональность конфокальных кривых имеет наглядное геометрическое объяснение через оптическое свойство коник: касательная к эллипсу является биссектрисой внешнего угла $\angle F_1PF_2$, а касательная к гиперболе — биссектрисой самого угла. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

Теорема 35 (Конфокальные квадрики в $\mathbb{R}^3$)**.** Семейство поверхностей

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1, \quad a^2 > b^2 > c^2 > 0,$$

задаёт конфокальные квадрики трёх типов (эллипсоиды, однополостные и двуполостные гиперболоиды), которые пересекаются попарно ортогонально.

Через каждую точку пространства (в общем положении) проходит по одной поверхности каждого типа.

Теорема 28 (Отображение Жуковского и конфокальные эллипсы)**.** При отображении $w = z + 1/z$ окружность $|z| = r$ $(r \neq 1)$ переходит в эллипс с полуосями $a = r + 1/r$ и $b = |r - 1/r|$, фокусное расстояние которого равно $c = 2$ независимо от r. Все такие эллипсы конфокальны с фокусами $w = \pm 2$.

Теорема 29 (Конфокальные гиперболы и отображение Жуковского)**.** При отображении Жуковского лучи $\arg z = \varphi_0 = \mathrm{const}$ переходят в гиперболы, конфокальные описанным эллипсам. Это следует из конформности отображения: образы ортогональных семейств (окружности и лучи) также ортогональны, а ортогональные конфокальным эллипсам кривые являются конфокальными гиперболами.

Определение 36 (Эллиптические координаты)**.** Пусть $a > b > 0$ фиксированы. Для точки (x, y), не лежащей на особых множествах, уравнение конфокального семейства, рассматриваемое относительно λ, имеет два вещественных корня $\lambda_1 > -b^2 > \lambda_2 > -a^2$. Пара (λ_1, λ_2) называется эллиптическими координатами точки (x, y). Геометрически λ_1 — параметр эллипса, а λ_2 — параметр гиперболы конфокального семейства, проходящих через данную точку.

Теорема 37 (Декартовы координаты через эллиптические)**.** Декартовы координаты выражаются через эллиптические (λ_1, λ_2) по формулам:

$$x^2 = \frac{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)}{a^2 - b^2}, \qquad y^2 = \frac{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)}{a^2 - b^2}.$$

Замечание 38 (Коэффициенты Ламе)**.** Квадрат элемента длины в эллиптических координатах имеет вид $ds^2 = h_1^2\, d\lambda_1^2 + h_2^2\, d\lambda_2^2$, где коэффициенты Ламе равны:

$$h_1^2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4(a^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_1)}, \qquad h_2^2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4(a^2 + \lambda_2)(b^2 + \lambda_2)}.$$

Эти коэффициенты играют ключевую роль при записи дифференциальных операторов в эллиптических координатах.

Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в эллиптических координатах допускает разделение переменных. Подстановка $u(\lambda_1, \lambda_2) = U_1(\lambda_1)\, U_2(\lambda_2)$ приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений Матьё в двумерном случае), что позволяет решать задачу Дирихле для эллиптических областей.

Для ортогональной системы координат с коэффициентами Ламе h_1, h_2 оператор Лапласа записывается в виде:

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \lambda_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \lambda_2} \right) \right).$$

Подставляя выражения для h_1, h_2 из замечания 3.3, можно показать, что уравнение Лапласа в эллиптических координатах принимает вид, допускающий разделение переменных. Практическое следствие: задача Дирихле для уравнения Лапласа в эллиптической области решается с помощью разложения по функциям Матьё — аналогам тригонометрических функций для эллиптических координат.

Теорема 40 (Теорема Айвори)**.** Однородный эллипсоид притягивает расположенные вне него точки так же, как и любой конфокальный с ним эллипсоид, расположенный внутри него. Однородный слой между двумя конфокальными эллипсоидами не оказывает никакого гравитационного притяжения на точки, находящиеся внутри меньшего из них.

Замечание 42 (Оптические приложения)**.** Оптическое свойство эллипса непосредственно применяется к задаче распространения волн: если в эллиптической чаше возбудить волну в одном фокусе, то, отразившись от эллиптической границы, она сфокусируется во втором фокусе. Все ломаные лучи F_1PF_2 имеют одинаковую длину $2a$, поэтому отражённые волны приходят во второй фокус одновременно. Данный эффект используется в конструировании лазерных резонаторов, акустических «шепчущих галерей» и медицинских литотрипторов.

Теорема 43 (Первый закон Кеплера)**.** Орбита каждой планеты является эллипсом, в одном из фокусов которого находится Солнце. Математическое доказательство закона Кеплера из закона всемирного тяготения Ньютона ($F \propto r^{-2}$) показывает, что орбиты в кулоновском и гравитационном полях являются коническими сечениями с фокусом в притягивающей точке.

Заключение. В работе систематически изложена теория конфокальных конических сечений.

В первой части работы строго введены понятия конического сечения в трёх эквивалентных формах: как сечения кругового конуса (конструкция Данделена), как геометрическое место точек с фокусным условием, и как множество решений алгебраического уравнения второй степени. Доказана эквивалентность этих определений. Получены канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы. Исследованы геометрические свойства: оси симметрии, фокально-директрисное и оптическое (отражательное) свойства для всех трёх коник.

Во второй части введено и исследовано конфокальное семейство кривых второго порядка. Доказано, что все кривые семейства имеют одни и те же фокусы $F_{1,2} = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ независимо от параметра λ. Установлено, что при $\lambda > -b^2$ получается эллипс, а при $-a^2 < \lambda < -b^2$ — гипербола. Доказана ключевая теорема о том, что через каждую точку плоскости (в общем положении) проходит ровно один эллипс и одна гипербола семейства. Получено строгое аналитическое доказательство ортогональности конфокальных эллипсов и гипербол. Установлена связь конфокальных семейств с отображением Жуковского $w = z + 1/z$.

В третьей части развита теория эллиптических координат. Вычислены коэффициенты Ламе, описан трёхмерный аналог. Рассмотрены приложения: разделение переменных в уравнении Лапласа в эллиптических областях, теорема Айвори о притяжении конфокальных эллипсоидов, оптическая фокусировка волн, связь с законами Кеплера. Решён ряд конкретных задач, иллюстрирующих практическое применение теории.

Главные результаты работы: (1) установлена эквивалентность геометрического, аналитического и фокусно-директрисного определений конических сечений; (2) доказана ортогональность конфокальных эллипсов и гипербол двумя независимыми методами; (3) построена система эллиптических координат и вычислены коэффициенты Ламе; (4) систематически изложены приложения в задачах математической физики.

Перспективы дальнейших исследований связаны с изучением геодезических линий на эллипсоиде (теорема Якоби), теории бильярдов в эллипсе, а также обобщением конфокальных систем на пространства постоянной кривизны.