МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

УЧЕБНЫЙ КУРС ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО ПОДГОТОВКЕ ШКОЛЬНИКОВ К РЕШЕНИЮ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 235 группа

направление **44.04.01 Педагогическое образование**

факультета физико-математических и естественно-научных дисциплин

Ханбикова Динислама Марсельевича

Научный руководитель:
доцент, к.ф.-м.н. ______________ М.А. Осипцев

Заведующий кафедрой:
зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент______________ Е.В. Разумовская

Саратов 2026

Введение. В Федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования отмечается, что основная образовательная программа реализуется через урочную и внеурочную деятельность организации.

Изучением проблемы раскрытия потенциала решения олимпиадных задач по математике занимались различные педагоги.

Мурзалиева З. З. и Михайлов П. Н. в своей работе «Подготовка учащихся к математической олимпиаде» отмечают популярность математических олимпиад.

А.М. Казарян обосновывает «олимпиадные задачи по математике порой не столько строго научные, сколько логические».

Многообразие научных публикаций по теме исследования раскрывает значимость различных курсов внеурочной деятельности, демонстрирует целесообразность их использования, но проблема актуальна, так как обусловлена возрастающим запросом на системную олимпиадную подготовку школьников в условиях развития Всероссийской олимпиады школьников и перечневых олимпиад как значимого механизма выявления и сопровождения математически одарённых обучающихся. Тема «Последовательности» регулярно представлена в олимпиадных заданиях 9–11 классов и требует владения не только содержанием школьного курса.

Актуальность темы «Последовательности» обусловлена значительной ролью числовых последовательностей в школьном курсе математики и в различных областях математики. Последовательности используются при изучении прогрессий, предела, элементов математического анализа, а также при решении задач алгебры, теории чисел, информатики и физики. Кроме того, задачи на последовательности имеют важное значение в олимпиадной математике, поскольку способствуют развитию логического мышления, навыков доказательства и умения выявлять закономерности.

Цель магистерской работы: теоретически обосновать и практически разработать методическое обеспечение учебного курса внеурочной деятельности по подготовке школьников к решению олимпиадных задач по теме «Последовательность» для учащихся 9-11 классов.

Задачи магистерской работы:

1) охарактеризовать внеурочную деятельность школьников на ступени среднего и основного общего образования.

2) выявить основные требования к учебным курсам внеурочной деятельности.

3) составить примерную программу учебного курса внеурочной деятельности по подготовке школьников к решению олимпиадных задач по теме «Последовательность» для учащихся 9-11 классов.

4) разработать и апробировать занятия учебного курса внеурочной деятельности по подготовке школьников к решению олимпиадных задач по теме «Последовательности» для учащихся 9-11 классов.

Основное содержание работы. В рамках магистерской работы, первый раздел курса внеурочной деятельности "Последовательность"для учащихся 9-11 классов фокусируется на теоретических аспектах и решении первых трех поставленных задач. Внеурочная деятельность определяется как целенаправленная образовательная и воспитательная работа, проводимая вне рамок обязательных уроков, с целью развития уникальных способностей и интересов каждого ученика. Эта деятельность охватывает широкий спектр направлений, включая спортивно-оздоровительное, духовно-нравственное, социальное, общеинтеллектуальное и общекультурное.

Основные цели внеурочных занятий по математике заключаются в следующем: пробудить и укрепить познавательный интерес, расширить и углубить имеющиеся знания, развить математическое мышление и культуру, сформировать навыки самостоятельной и творческой работы, привить исследовательские компетенции, а также познакомить с культурно-историческим и практическим значением математики.

Была разработана программа курса, которая содержит пояснительную записку, в которой указаны реализуемое направление внеурочной деятельности, цель, задачи и сроки проведения курса, описана его актуальность, перечислены планируемые результаты освоения данного учебного курса, приведено содержание и тематическое планирование курса. В данном разделе также были разработаны план-конспекты занятий данного курса. Далее представлены фрагменты некоторых занятий.

Фрагмент №1

Арифметическая прогрессия называется **возрастающей**, если её разность положительна, и **убывающей**, если её разность отрицательна.

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Это равенство и является **формулой n-го члена арифметической прогрессии**, в которой первый член равен a_1 и разность равна d.

Доказательство.

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

В частности, пишем:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \end{aligned}$$

и теперь становится ясно, что формула для a_n имеет вид:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

□

Свойство арифметической прогрессии. В арифметической прогрессии a_n для любого $n \geqslant 2$ выполнено равенство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Иначе говоря, каждый член арифметической прогрессии (начиная со второго) является средним арифметическим соседних членов.

Доказательство.

Имеем:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_n - d) + (a_n + d)}{2} = a_n$$

что и требовалось. □

Более общим образом, для арифметической прогрессии a_n справедливо равенство

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

при любом $n \geqslant 2$ и любом натуральном $k < n$. Доказательство то же, что и свойства арифметической прогрессии.

Оказывается, эта формула служит не только необходимым, но и достаточным условием того, что последовательность является арифметической прогрессией.

Признак арифметической прогрессии. Если для всех $n \geqslant 2$ выполнено свойство , то последовательность a_n является арифметической прогрессией.

Доказательство.

Перепишем формулу следующим образом:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

Отсюда видно, что разность $a_{n+1} - a_n$ не зависит от n, а это как раз и означает, что последовательность a_n есть арифметическая прогрессия. □

Свойство и признак арифметической прогрессии можно сформулировать в виде одного утверждения; мы для удобства сделаем это для трёх чисел (именно такая ситуация часто встречается в задачах).

Критерий арифметической прогрессии. Три числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $2b = a + c$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии.

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Доказательство.

Именно, запишем друг под другом:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

и сложим:

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)\,.$$

Каждое слагаемое в скобках равно $a_1 + a_n$, а всего таких слагаемых n. Поэтому

$$2S = (a_1 + a_n) \cdot n$$

откуда

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

□

Полезная модификация формулы получается, если в неё подставить формулу n-го члена $a_n = a_1 + (n-1)d$:

$$S = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n \qquad (1)$$

Пример решения задач.

Задача 1. Найти сумму всех положительных трёхзначных чисел, делящихся на 13.

Решение.

Трёхзначные числа, кратные 13 , образуют арифметическую прогрессию с первым членом 104 и разностью 13; n-й член этой прогрессии имеет вид:

$$a_n = 104 + 13(n-1) = 91 + 13n.$$

Давайте выясним, сколько членов содержит наша прогрессия. Для этого решим неравенство:

$$a_n \leqslant 999$$
$$91 + 13n \leqslant 999$$
$$13n \leqslant 908$$
$$n \leqslant \frac{908}{13} = 69\frac{11}{13}$$
$$n \leqslant 69$$

Итак, в нашей прогрессии 69 членов. По формуле (1) находим искомую сумму:

$$S = \frac{2 \cdot 104 + 68 \cdot 13}{2} \cdot 69 = 37674$$

Фрагмент №2

Рядом (бесконечной сумма) назовём сумму бесконечного числа слагаемых, упорядоченных в определённой последовательности. В простейшем случае ряд записывается как бесконечная сумма чисел и обозначается так:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Телескопический ряд в математике — бесконечный ряд, чья сумма может быть легко получена, исходя из того, что при раскрытии скобок почти все слагаемые взаимно уничтожаются. Название дано по аналогии с трубой телескопа, который может уменьшить свою длину, сложившись несколько раз. Мы уже рассматривали пример телескопического ряда в задаче 1, раздела введения. Изучим их в более общем виде.

Самый известный пример такого ряда — сумма обратных прямоугольных чисел (конечный вариант):

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)},$$

которая упрощается следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) =$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \dots + (\frac{1}{k} - \frac{1}{k}) + (-\frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Суть телескопических сумм заключается в том, что каждое слагаемое ряда представляется в виде разности и поэтому сумма ряда упрощается:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

Аналогично можно представить себе «телескопическое» произведение, то есть бесконечное (конечное) произведение вида:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_1}.$$

Пример 1. Вычислить сумму

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}.$$

Для любого $k \geq 1$ верно тождество

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Тогда, обозначив

$$Sn = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2},$$

получаем телескопическую сумму:

$$Sn = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Пример 2. Найти сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1}.$$

Здесь Fi — числа Фибоначчи, определяемые рекуррентно:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{m+1} = F_m + F_{m-1} \;\; (m \geq 1).$$

Первые члены: $F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ \ldots$

Телескопическое представление каждого слагаемого:

$$F_{2k} = F_{2k-1} + F_{2k-2} \implies F_{2k-1} = F_{2k} - F_{2k-2}.$$

Подставим в сумму и получим телескопирование:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \big(F_{2k} - F_{2k-2}\big) = (F_2 - F_0) + (F_4 - F_2) + \cdots + (F_{2n} - F_{2n-2}) = F_{2n} - F_0.$$

Так как $F_0 = 0$, имеем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}.$$

Задача 1. Найдите значение суммы

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(2^{2025} + \frac{1}{2^{2025}}\right)^2$$

в замкнутом виде (без знаков многоточия).

Решение. Так как для любого натурального k верно $\left(2^k + \frac{1}{2^k}\right)^2 = 2^{2k} + 2 + \frac{1}{2^{2k}}$, то, обозначив $n = 2025$, получаем

$$\left(2^1 + \frac{1}{2^1}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \ldots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2 =$$

$$= 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{2n} + 2n + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}} = 2n + Sn,$$

где Sn — сумма геометрической прогрессии с первым членом $2^2 + \dfrac{1}{2^{2n}}$ и знаменателем 2^2, которая считается по формуле

$$S_n = \left(2^2 + \frac{1}{2^{2n}}\right) \cdot \frac{2^{2n} - 1}{4 - 1}.$$

В итоге при $n = 2025$ получаем

$$2 \cdot 2025 + S_{2025} = 4050 + \left(\frac{4^{2026} + 1}{4^{2025}}\right) \cdot \frac{4^{2025} - 1}{3}.$$

Ответ:

$$4050 + \frac{4^{2026} + 1}{4^{2025}} \cdot \frac{4^{2025} - 1}{3}.$$

Задача 2. («Ломоносов», 2021). Найдите $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(13)$, если $f(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n + 13$.

Решение. Заметим, что

$$f(n) = n^4 - (n-1)^4 + 14.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \cdots + f(13) &= \left(1^4 + 2^4 + \cdots + 13^4\right) - \left(0^4 + 1^4 + \cdots + 12^4\right) + 14 \cdot 13 \\ &= 13^4 + 14 \cdot 13 = 28743. \end{aligned}$$

Ответ: 28743.

Задача 3. (САММАТ, 2022). Дана арифметическая прогрессия $a_1 = 25,\ a_2, a_3, \ldots,\ a_{2022} = 2025$. Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{2021}} + \sqrt{a_{2022}}}.$$

Решение. Разность прогрессии

$$d = \frac{2025 - 25}{2022 - 1} = \frac{2000}{2021}.$$

Домножая каждую дробь на сопряжённое выражение, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k} = \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}.$$

Суммируя, имеем телескопическую сумму:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{2021}}+\sqrt{a_{2022}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_{2022}}-\sqrt{a_{2021}}}{a_{2022}-a_{2021}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d} + \ldots + \frac{\sqrt{a_{2022}}-\sqrt{a_{2021}}}{d} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_{2022}}-\sqrt{a_1}}{d} = \frac{45-5}{2000/2021} = \frac{2021}{50} = 40,42.$$

Ответ: $\dfrac{2021}{50} = 40{,}42$.

Заключение. В результате выполнения магистерской работы были получены следующие теоретические и практические результаты.

Охарактеризована внеурочная деятельность на ступени среднего и основного общего образования: дано определение, выявлены основные требования к ее реализации. Выявлены основные требования, предъявляемые к учебному курсу внеурочной деятельности, охарактеризованы основные формы его реализации. Составлена примерная программа курса внеурочной деятельности по подготовке школьников к решению олимпиадных задач по теме «Последовательности». Разработано и апробированы некоторые занятия курса внеурочной деятельности по подготовке школьников к решению олимпиадных задач по теме «Последовательности», описаны полученные после апробации результаты.