МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ОПТИМИЗАЦИЯ КЛЮЧЕВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАБОТЫ СОРТИРОВОЧНОЙ СТАНЦИИ ПУТЕМ ПОСТРОЕНИЯ И АНАЛИЗА МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Шабановой Дарьи Дмитриевны

Научный руководитель
старший преподаватель ______________ Н. В. Сергеева

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2026

ВВЕДЕНИЕ

Железнодорожные сортировочные станции (ЖСС) представляют собой сложные системы, где ежедневно перерабатываются тысячи вагонов и формируются десятки составов. Возникновение очередей при расформировании составов на сортировочных горках, скопление готовых к отправлению поездов из-за занятости примыкающих участков и задержки в обработке вагонов существенно снижают эффективность работы станции. Теория массового обслуживания совместно с применением имитационного моделирования позволяют создавать гибкие инструменты для анализа и повышения эффективности таких систем.

Современные методы анализа работы сортировочных станций основаны либо на имитационном моделировании, требующем значительных вычислительных затрат, либо на упрощенных аналитических моделях отдельных элементов, не учитывающих взаимное влияние узлов станции. Актуальность работы обусловлена необходимостью разработки комплексного подхода, сочетающего математический аппарат сетей массового обслуживания (СеМО) для быстрого получения результатов и имитационную модель для подтверждения их точности.

Апробация работы: основные положения и результаты исследования были доложены и обсуждены на следующих российских и международных научных конференциях: Научная конференция механико-математического факультета СГУ «Актуальные проблемы математики и механики» (Саратов, 2025); Заключительное заседание студенческой научной конференции СГУ (Саратов, 2025); Научная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии» памяти А.М. Богомолова (Саратов, 2025); Всероссийская конференция с международным участием, посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, 2025); XXIV Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Красноярск, 2025).

Публикации: по теме исследования опубликованы 2 печатных работы:

1. Сергеева, Н. В. Моделирование сортировочных транспортных систем сетью массового обслуживания / Н. В. Сергеева, Д. Д. Шабанова, И. Е.

Тананко // Информационные технологии и математическое моделирование: материалы XXIV Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова (ИТММ-2025). — Красноярск, 2025. — С. 277–280.
2. Шабанова, Д. Д. Моделирование работы железнодорожной сортировочной станции сетью массового обслуживания / Д. Д. Шабанова // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета: материалы итоговой студенческой научной конференции. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2025. — С. 8–9.

Цель бакалаврской работы: изучить влияние ключевых параметров работы железнодорожной сортировочной станции на ее общую производительность методами имитационного моделирования и теории массового обслуживания.

Задачи бакалаврской работы:

1. Изучить теоретические основы систем массового обслуживания и открытых сетей массового обслуживания.
2. Разработать теоретическую модель открытой СеМО для моделирования ЖСС.
3. Разработать алгоритмы и реализовать имитационную модель открытой СеМО для оценки ее основных характеристик.
4. Сравнить результаты моделирования, полученные на основе теоретической и имитационной моделей.
5. Применить построенные модели для анализа работы железнодорожной сортировочной станции.
6. Сформулировать и решить оптимизационную задачу режима работы станции, минимизирующего среднее время нахождения состава в сети.

Данная бакалаврская работа состоит из семи разделов.

В первом разделе рассмотрены основные определения и понятия теории массового обслуживания: классификация СМО по обозначению Кендалла, свойства пуассоновского потока, марковские процессы и процессы размножения и гибели.

Во втором разделе описаны четыре типа систем массового обслуживания с ожиданием: СМО типа $M/M/1$, $M/M/\kappa$, с групповым входящим потоком $M^b/M/1$ и групповым обслуживанием $M/M^b/1$; приведены формулы для стационарных вероятностей и основных характеристик каждой системы.

Третий раздел работы содержит описание открытой сети массового обслуживания, ее структуру, маршрутную матрицу и параметры.

В четвертом разделе строится математическая модель железнодорожной сортировочной станции.

В пятом разделе представлены принципы имитационного моделирования СеМО, разработаны алгоритмы моделирования открытой СеМО и описана программная реализация на языке Python.

Шестой раздел посвящен применению имитационной и теоретической модели для моделирования работы гипотетической ЖСС, приведены результаты моделирования, сравнение теоретических и эмпирических значений характеристик, а также анализ возможностей оптимизации работы станции.

В седьмом разделе сформулирована математическая постановка оптимизационной задачи. На основе разработанной имитационной модели выполнен вычислительный эксперимент, в ходе которого проанализировано влияние интенсивности входящего потока на ключевые показатели эффективности системы. Продемонстрированы результаты моделирования для двух сценариев, различающихся вероятностью выявления технических неисправностей, а также определен оптимальный режим функционирования ЖСС и даны практические рекомендации.

1 Основное содержание работы

Классификация систем массового обслуживания. Системы массового обслуживания (СМО) – это математические модели реальных или проектируемых систем, функционирование которых можно рассматривать как последовательное взаимодействие дискретных объектов (заявок) с элементами системы (обслуживающими приборами). Для компактного описания СМО используются обозначения Кендалла $A/S/\kappa/B/Z$.

В рамках работы рассматривается пуассоновский входящий поток – случайный поток $\{\tau_k, k \geq 1\}$, обладающий свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности. Функционирование экспоненциальных СМО описывается марковским процессом с непрерывным временем, а также процессом размножения и гибели (ПРГ).

Системы массового обслуживания с ожиданием. В работе рассматриваются СМО четырех типов.

Система $M/M/1$. Одноканальная СМО с накопителем неограниченной емкости, пуассоновским входящим потоком интенсивности λ и экспоненциальным временем обслуживания с параметром μ. Стационарные вероятности определяются формулой

$$p_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n \geq 0, \tag{1}$$

где $\rho = \lambda/\mu$ – коэффициент загрузки системы. Среднее время пребывания заявки в системе:

$$\overline{u} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}. \tag{2}$$

Система $M/M/\kappa$ (многоканальная). В системе имеется κ одинаковых параллельных приборов. Входящий поток – пуассоновский с интенсивностью λ, время обслуживания на каждом приборе – экспоненциальное с параметром μ. Коэффициент загрузки

$$\rho = \frac{\lambda}{\kappa\mu}. \tag{3}$$

При условии $\rho < 1$ существует стационарный режим. Вероятность отсутствия требований в системе:

$$p_0 = \left(\frac{(\kappa\rho)^\kappa}{\kappa!\,(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{(\kappa\rho)^n}{n!} \right)^{-1}.$$

М.о. времени пребывания требования в системе:

$$\overline{u} = \frac{1}{\mu} \left[p_0 \frac{\kappa^{\kappa-1}\rho^\kappa}{\kappa!\,(1-\rho)^2} + 1 \right]. \tag{4}$$

Система $M^b/M/1$ (с групповым входящим потоком). В систему поступает пуассоновский поток групп заявок с интенсивностью λ; в каждой группе приходит случайное число заявок с вероятностью l_k, $k \geq 1$. Заявки обслуживаются по одной и времена обслуживания заявок независимы и одинаково распределены по экспоненциальному закону с параметром μ. Коэффициент загрузки $\rho = l\lambda/\mu$.

Среднее время пребывания заявки в системе:

$$\overline{u} = \frac{l^{(2)} + l}{2\mu l(1-\rho)}, \tag{5}$$

где $l = \sum_{k=1}^{\infty} k l_k$, $\quad l^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 l_k$ – первый и второй начальные моменты числа заявок в группе соответственно.

Система $M/M^b/1$ (с групповым обслуживанием). В систему поступает пуассоновский входящий поток требований с интенсивностью λ. Прибор обслуживает группу требований размера b. Длительность обслуживания – случайная величина, имеющая экспоненциальное распределение с параметром μ. Обслуживающий прибор простаивает до тех пор, пока в очереди не накопится минимум b требований. Условие стационарности: $\rho = \lambda/b\mu < 1$. Математическое ожидание времени пребывания требования в системе:

$$\overline{u} = \frac{b-1}{2\lambda} + \frac{1}{M-\lambda}, \tag{6}$$

где $M = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}_n$ – корень уравнения

$$M^{b+1} - (\lambda+\mu)M^b + \lambda^b\mu = 0, \tag{7}$$

принадлежащий интервалу $\left(\dfrac{b(\lambda+\mu)}{b+1}, \dfrac{(\lambda+\mu)^{b+1} - \lambda^b\mu}{(\lambda+\mu)^b}\right)$.

Математическая модель железнодорожной сортировочной станции. В качестве математической модели ЖСС рассматривается открытая СеМО, состоящая из систем массового обслуживания четырех типов.

Система S_1 представляет собой СМО с групповым входящим потоком и групповым обслуживанием. Входящий поток – групповой пуассоновский с интенсивностью λ_0, размер группы b_1 – равномерно распределен на отрезке $[\alpha, \beta]$, обслуживание группы – экспоненциальное с параметром μ_1. С вероятностью $0 < p < 1$ выявляется техническая неисправность и вагон направляется в систему S_3 для восстановления, иначе – в S_2.

Система S_2 – система $M^{b_2}/M/1$ с групповым входящим потоком. Требования обслуживаются по одному. Длительности обслуживания требований независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром μ_2.

Система S_3 – простейшая $M/M/1$; после восстановления вагон возвращается в S_2 и завершает обслуживание с вероятностью 1.

Далее вагоны с вероятностями θ_{2i} поступают в системы S_i $(i = 4, \ldots, 27)$. Каждая S_i – система $M/M^{b_i}/1$ с групповым обслуживанием: размер группы b_i фиксирован, обслуживание группы – экспоненциальное с параметром μ_i. После завершения обслуживания в системе S_i, $i = 4, ..., L-1$, группа требований переходит с вероятностью $\theta_{iL} = 1$ в систему S_L.

Система S_L представляет собой систему с групповым входящим потоком заявок и групповым обслуживанием. Для упрощения модели систему S_1 будем рассматривать как систему типа $M/M/1$ с интенсивностью обслуживания μ_1, а систему S_L – как систему типа $M/M/\kappa$ $(\kappa = 3)$.

Данную сеть можно рассматривать как сеть Джексона. Построенная модель предполагает тандемное обслуживание требований, поэтому для нее математическое ожидание (м.о.) длительности пребывания требований в сети может быть вычислено по формуле

$$\tau = \sum_{i=1}^{2} \bar{u}_i + p\bar{u}_3 + \sum_{i=4}^{L-1} \bar{u}_i \theta_{2i} + \bar{u}_L, \tag{8}$$

где $\bar{u}_i$ - м.о. длительности пребывания требований в системе S_i, $i = 1, ..., L$. В формуле (8) первое слагаемое представляет собой сумму м.о. длительностей пребывания требований в системах S_1 и S_2, так как, согласно модели, все требования должны обслужиться в этих системах. Второе слагаемое отвечает за м.о. длительности пребывания в системе S_3. Туда попадают только забракованные требования. Поскольку требование обслуживается только в одной из систем S_i, $i = 4, ..., L-1$, в которую попадает с вероятностью θ_{2i}, то третье слагаемое представляет собой м.о. длительности пребывания требования в сортировочно-отправочном парке. Последнее слагаемое характеризует м.о. длительности пребывания требований в системе S_L, в которой обслуживаются все требования.

Имитационная модель железнодорожной сортировочной станции. Функционирование рассматриваемой СеМО опишем следующими событиями:

— *формирование группы требований в источнике* S_0: генерируется пуассоновский интервал между группами с интенсивностью λ_0; размер группы b_1 задается как дискретная равномерная случайная величина из отрезка $[\alpha, \beta]$;

— *начало обслуживания требования в* S_1: требование принимается из очереди и генерируется экспоненциальное время обслуживания с параметром μ_1;

— *завершение обслуживания в* S_1: с вероятностью p вагон направляется в S_3, если требование забраковано; с вероятностью $(1-p)$ – в S_2;

— *завершение обслуживания в* S_2: требование переходит в одну из систем S_i, $i = 4, \ldots, L-1$, с вероятностью θ_{2i};

— *завершение обслуживания в* S_3: требование возвращается в S_2;

— *накопление группы размером* b_i в системах $S_4, \ldots, S_{L-1}$ и начало обслуживания группы;

— *завершение обслуживания группы в* S_i, $i = 4, \ldots, L-1$, и переход группы в S_L;

— *начало обслуживания в* S_L: один из κ освободившихся приборов (локомотивов) принимает группу;

— *завершение обслуживания в* S_L: группа покидает сеть.

Программная реализация имитационной модели СеМО была выполнена на языке Python.

Входными данными программы являются:

— T – модельное время;

— L – количество систем;

— λ_0 – интенсивность входящего потока требований (число групп требований в час);

— $\mu = (\mu_i)$, $i = 1, \ldots, L$ – вектор интенсивностей обслуживания (число требований в час для системы S_2 и число групп в час для остальных систем);

— θ_{2i}, $i = 4, \ldots, L-1$ – вероятности перехода из системы S_2 в систему S_i;

— α, β – минимальный и максимальный размер группы соответственно.

Выходные данные программы приведены ниже.

Коэффициенты использования $\tilde{\rho}_i$ систем обслуживания, которые вычислялись по формуле:

$$\tilde{\rho}_i = \frac{\text{суммарное время обслуживания}}{\text{время моделирования}}; \tag{9}$$

среднее время ожидания требования в очереди системы S_i:

$$\tilde{w}_i = \frac{\text{суммарное время ожидания в очереди}}{\text{количество требований}};$$

среднее время пребывания требования в системе S_i:

$$\tilde{u}_i = \frac{\text{суммарное время пребывания требований в системе}}{\text{количество требований}}; \tag{10}$$

среднее время ожидания требований в сети:

$$W = \frac{\text{суммарное время ожидания требований в очереди}}{\text{интенсивность входящего потока требований}};$$

среднее время пребывания требований в сети:

$$U = \frac{\text{суммарное время пребывания требований в сети}}{\text{интенсивность входящего потока требований}}. \qquad (11)$$

Применение теоретической и имитационной моделей для анализа работы железнодорожной сортировочной станции. Рассматривается открытая СеМО из $L = 28$ СМО: S_1, S_{28} – приемо-отправочные парки; S_2 – сортировочная горка; S_3 – вагоноремонтное депо; $S_4, \ldots, S_{27}$ – сортировочно-отправочный парк. Для систем $S_4, \ldots, S_{27}$ размер группы равномерно распределен на отрезке $[50, 70]$. Интенсивность входящего потока $\lambda_0 = 1$ поезд/час, интенсивность обслуживания в системе S_1 $\mu_1 = 1.3$ поезда/час и $\mu_2 = 179$ вагонов/час в S_2. Вагоны равновероятно распределяются на сортировочные пути; μ_i для $i = 4, \ldots, 27$ выбираются равномерно из $[4, 6]$ поездов/час. Вероятность брака $p = 0.01$, интенсивность входящего потока в S_3 – 0.6 вагона/час, $\mu_3 = 1.4$ вагона/час. Для S_{28}: $\lambda_{28} = 1$ поезд/час, $\mu_{28} = 4$ поезда/час. Модельное время 10^6 часов.

На основе теоретической модели были вычислены м.о. длительностей пребывания вагонов на различных этапах обслуживания. Для проверки была создана имитационная модель. Результаты для избранных систем приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Сравнение системных характеристик, вычисленных по теоретическим формулам и при помощи имитационной модели ($L = 28$, $\lambda_0 = 1$, $\alpha = 50$, $\beta = 70$, $p = 0.01$)

S_i	μ_i	b_i	$\tilde{u}_i$	$\overline{u}_i$	$\tilde{\rho}_i$	ρ_i
S_1	1.3	60	3.27	3.33	0.7665	0.7692
S_2	179	60	0.25	0.26	0.3332	0.3352
S_3	1.4	1	1.62	1.25	0.4298	0.4286
S_4	6	67	13.48	13.37	0.0062	0.0062
S_5	4	56	11.30	11.25	0.0107	0.0112
…	…	…	…	…	…	…
S_{28}	4	60	0.25	0.25	0.0840	0.0833

Здесь $\tilde{u}_i, \tilde{\rho}_i$ — оценки, вычисленные с помощью имитационной модели, $\overline{u}_i, \rho_i$ — теоретические значения.

Среднее время пребывания требования в сети, полученное по формуле (11) в результате вычислительного эксперимента, а также рассчитанное по формуле (8), составляет: $U = 15.85$ часа и $\tau = 16$ часов соответственно.

Относительная погрешность не превосходит 1%, что подтверждает адекватность предложенной модели. Таким образом, для анализа подобных систем можно использовать теоретическую модель.

Оптимизация показателей работы сортировочной станции. Было показано, что система S_3 (ВЧДР) является «узким местом» станции. Данный факт натолкнул на мысль о возможности поиска оптимального режима функционирования станции. Поставлена оптимизационная задача, заключающаяся в поиске минимального среднего времени пребывания требования на станции $\tau(\lambda_0)$ путем варьирования интенсивности входящего потока λ_0. Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \tau(\lambda_0) \to \min\limits_{\lambda_0}, \\ \rho_1(\lambda_0) < 1, \\ \rho_3(\lambda_0; p) < 1, \\ 0.5 \leq \lambda_0 \leq 2.9, \end{cases} \tag{12}$$

где $\rho_3 = p\lambda_0 b_1/\mu_3 < 1$ – накладываемое *ограничение* на систему S_3, при котором выполняется условие стационарности в данной системе. Интенсивность обслуживания в S_1 принята равной $\mu_1 = 3$ поезда/час.

На рисунке 1 представлены графики зависимости $\tau(\lambda_0)$ для двух значений вероятности выявления технической неисправности, $p = 0.007$ и $p = 0.01$.

Численное решение показало, что функция $\tau(\lambda_0)$ имеет U-образную форму. Оптимальное значение $\lambda_0^* = 2.2$ поезда/час достигается при обоих рассмотренных значениях вероятности выявления технической неисправности; соответствующее минимальное время пребывания $\tau^* \approx 7.67$–7.87 часа. При $p = 0.01$ ограничение на S_3 является активным ($\lambda_0^{\text{крит}} \approx 2.33$), а при $p = 0.007$ – пассивным ($\lambda_0^{\text{крит}} \approx 3.33$), что обеспечивает значительно больший запас устойчивости. Найденный оптимум устойчив к вариациям p и может служить рекомендацией для организации грузоперевозок.

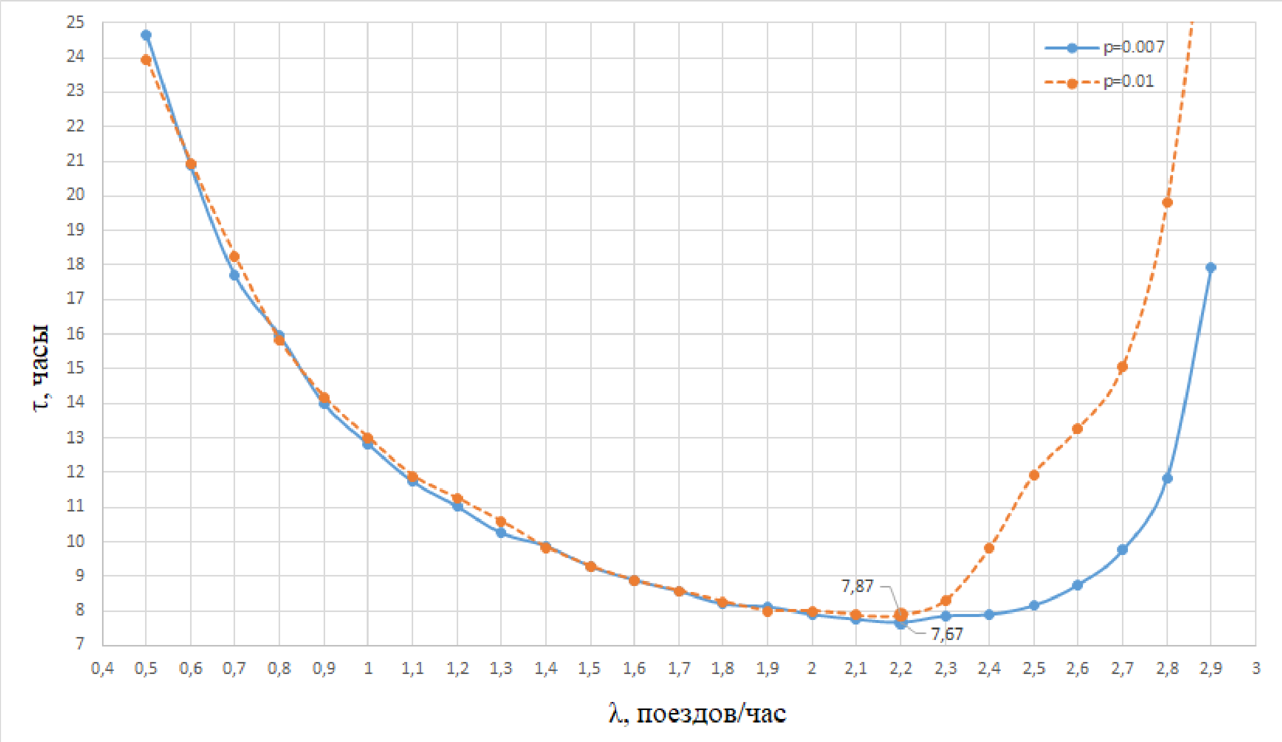

Рисунок 1 – График зависимости $\tau(\lambda_0)$ при $\mu_1 = 3$, $p = 0.007$ и $p = 0.01$

Также на рисунке 2 представлена зависимость среднего времени ожидания требования в системе S_3 от интенсивности входящего потока λ_0.

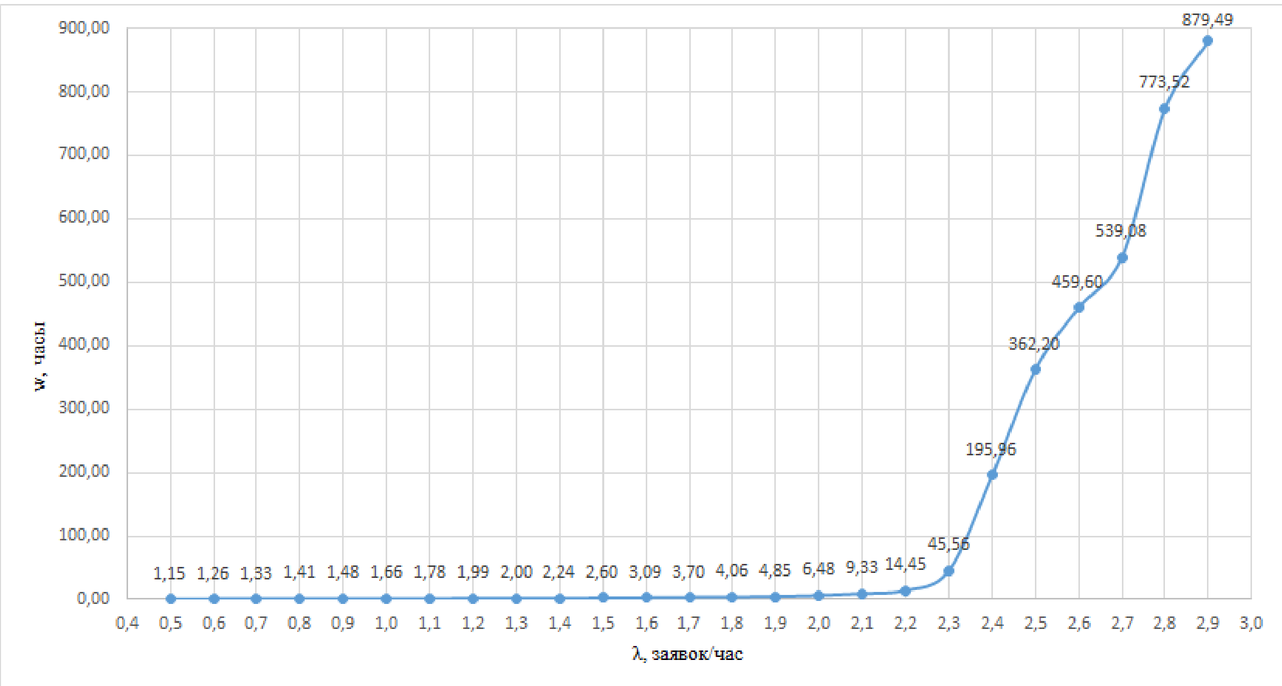

Рисунок 2 – График зависимости $\bar{w}_{S_3}(\lambda_0)$ при $\mu_1 = 3$, $p = 0.01$

При $\lambda_0 \leq 2.2$ система функционирует устойчиво, время пребывания вагонов на станции остается в пределах нормы. Однако при $\lambda_0 \geq 2.3$ наблюдается резкий нелинейный рост: уже при $\lambda_0 = 2.3$ среднее время пребывания на станции составляет 45.56 ч, при $\lambda_0 = 2.5$ – 362.2 ч, а при $\lambda_0 = 2.9$ – 879.49 ч, что соответствует почти 37 суткам, что подтверждает аналитический расчет $\lambda_0^{\text{крит}} \approx 2.33$.

Таким образом, анализ результатов оптимизации показал, что ключевым фактором, влияющим на длительность пребывания вагонов на станции, является уровень загрузки ВЧДР (система S_3). Оптимальная интенсивность входящего потока $\lambda_0^* = 2.2$ поезда/час обеспечивает минимальное время пребывания вагона на станции при обоих сценариях.

Были предложены следующие практические рекомендации:

1. Усилить контроль технического состояния вагонов на станциях формирования до их прибытия на сортировочную станцию. Это позволит снизить нагрузку на вагоноремонтное депо (система S_3) и, как следствие, уменьшить задержки, вызванные обслуживанием в данной системе.
2. Повысить производительность вагоноремонтного депо за счет увеличения интенсивности обслуживания (например, посредством привлечения дополнительных трудовых ресурсов или организации дополнительных смен).

Полученные выводы, основанные на анализе построенной модели, могут служить основой для разработки практических мер по оптимизации работы станции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе рассмотрены основные определения и понятия теории массового обслуживания, описаны четыре вида СМО: с групповым входящим потоком ($M^b/M/1$), с групповым обслуживанием ($M/M^{b_i}/1$), системы типа $M/M/1$ и $M/M/\kappa$, рассмотрена открытая СеМО.

Построена математическая модель ЖСС в виде открытой сети массового обслуживания, учитывающей ключевые технологические операции.

Разработана имитационная модель на языке Python, позволяющая вычислять оценки основных характеристик систем и сети при различных входных параметрах.

Продемонстрирована адекватность теоретической модели: относительная погрешность между теоретическими и имитационными значениями характеристик не превышает 1%.

Сформулирована и решена оптимизационная задача. Установлено, что при производительности системы приема $\mu_1 = 3$ поезда/час оптимальная интенсивность входящего потока составляет $\lambda_0^* = 2.2$ поезда/час, обеспечивая $\tau^* \approx 7.67–7.87$ ч в зависимости от вероятности обнаружения технической неисправности p.

Построенные модели могут быть использованы для:

— оптимизации режима работы сортировочной станции;
— снижения времени ожидания роспуска составов на сортировочных горках;
— повышения общей пропускной способности системы;
— прогнозирования работы станции при изменении входящего потока;
— определения оптимального числа путей и их вместимости при проектировании новых ЖСС;
— выявления узких мест в структуре станции для их последующего устранения.