

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

**АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ДОЛГОСРОЧНОГО СТРАХОВАНИЯ
ЖИЗНИ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Гладышевой Ксении Алексеевны

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н., доцент

В. Р. Шебалдин

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

С. П. Сидоров

Саратов 2026

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Долгосрочное страхование жизни является одним из ключевых инструментов социальной защиты и финансового планирования, обязательства по которому могут длиться десятилетиями. Пенсионная реформа в России, предусматривающая поэтапное повышение пенсионного возраста, создала устойчивый запрос на страховые продукты, способные дополнить государственное пенсионное обеспечение. Одновременно российский рынок страхования жизни переживает этап активного роста: по итогам 2024 года суммарные премии достигли примерно 2,1 трлн руб., а с 2025 года на рынок выведен новый продукт — долевое страхование жизни (ДСЖ).

В этих условиях математически обоснованная оценка различных видов страхования жизни становится не только теоретической, но и прикладной задачей, имеющей прямое социально-экономическое значение. Актуарные расчёты, учитывающие демографические факторы (законы смертности) и изменение стоимости денег во времени (техническая процентная ставка), являются фундаментом для обеспечения финансовой устойчивости страховых компаний.

Цель работы — изучение, систематизация и количественная оценка моделей долгосрочного страхования жизни на основе классических и динамических законов смертности, а также реализация инструментария для автоматизированного расчёта актуарных приведённых стоимостей.

Задачи исследования:

1. Изучить и систематизировать теоретические основы долгосрочного страхования жизни, включая элементы финансовой математики, характеристики продолжительности жизни, аналитические законы смертности (де Муавр, Гомпертц, Мейкхам), динамическую модель Ли–Картера и классификацию основных видов страхования.
2. Реализовать программный инструментарий на языке Python для численного расчёта нетто-премий и провести анализ чувствительности с вычислением эластичности нетто-премии по различным параметрам, а также сценарный анализ.
3. Выполнить калибровку параметров моделей Гомпертца и Мейкхама по

данным Росстата за 2022 год и сравнить полученные нетто-премии с эмпирическими.

4. Оценить предсказательную способность модели Ли–Картера в годы без стресс-фактора и годы с повышенной смертностью, а также построить гибридную модификацию для учёта временных всплесков смертности.
5. Сформулировать практические рекомендации по выбору модели смертности в зависимости от типа договора и экономических условий.

Материалы исследования. Работа выполнена с использованием данных Федеральной службы государственной статистики (Росстат) за 2012–2022 годы, включая таблицы смертности и численности населения. Расчёты проведены на языке программирования Python с применением библиотек NumPy, Pandas, SciPy.

Структура работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав (теоретической и практической), заключения, списка литературы из 20 источников и приложения с листингом программы. В первой главе рассмотрены финансово-демографические основы актуарных расчётов и классические модели страхования жизни. Во второй главе представлены результаты анализа чувствительности, калибровки моделей по данным Росстата, прогнозирования смертности и построения гибридной модели Ли–Картера.

1 Основное содержание работы

1. Финансово-демографические основы актуарных расчётов.

Фундаментальным инструментом актуарных расчётов является дисконтирование — приведение будущих платежей к текущему моменту. При эффективной годовой процентной ставке i коэффициент дисконтирования за один год составляет $v = 1/(1+i)$. Для непрерывных моделей удобнее использовать интенсивность процентов $\delta = \ln(1+i)$, тогда современная стоимость будущей выплаты C в момент t равна $Ce^{-\delta t}$.

Ключевым фактором неопределённости в страховании жизни является случайный момент смерти застрахованного. Пусть T — продолжительность жизни новорождённого, тогда функция выживания $s(x) = P(T \geq x)$ определяет вероятность дожить до возраста x . Интенсивность смертности (сила смертности) $\mu_x = -\frac{d}{dx} \ln s(x)$ задаёт мгновенную вероятность умереть в возрасте x . Для страхователя в возрасте x остаточное время жизни T_x имеет плотность $f_x(t) = \mu_{x+t} \cdot \frac{s(x+t)}{s(x)}$.

В работе рассматриваются три классических аналитических закона смертности:

- **Закон де Муавра:** $\mu_x = \frac{1}{\omega-x}$, $s(x) = 1 - \frac{x}{\omega}$ (предельный возраст ω);
- **Закон Гомпертца:** $\mu_x = Bc^x$, $s(x) = \exp\left\{-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right\}$;
- **Закон Мейкхама:** $\mu_x = A + Bc^x$, учитывает фоновую смертность A .

Для учёта изменения смертности во времени используется динамическая модель Ли–Картера: $\ln m_{x,t} = a_x + b_x k_t$, где k_t — временной индекс смертности, моделируемый как случайный процесс.

2. Модели долгосрочного страхования жизни и их оценка. Введена общая модель договора: страховая выплата производится в момент $\tau(T)$ после заключения договора, её величина составляет b_T . Современная стоимость выплаты $Z = b_T v^{\tau(T)}$ является случайной величиной. Актуарная приведённая стоимость (разовая нетто-премия) определяется как математическое ожидание $A = \mathbb{E}Z$.

Для основных видов страхования (с единичной страховой суммой) получены интегральные формулы:

- **Пожизненное страхование:** $\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t f_x(t) dt$;
- **n -летнее временное страхование:** $\bar{A}_{x:\bar{n}}^1 = \int_0^n v^t f_x(t) dt$;

- n -летнее смешанное страхование: $\bar{A}_{x:\bar{n}} = \int_0^n v^t f_x(t) dt + v^n {}_n p_x$;
- Пожизненное страхование, отсроченное на m лет: ${}_m \bar{A}_x = \int_m^\infty v^t f_x(t) dt$;
- Пожизненное страхование с непрерывно возрастающей суммой: $(\bar{IA})_x = \int_0^\infty t v^t f_x(t) dt$.

Эти формулы служат основой для численных расчётов в практической части работы. Для их вычисления разработан программный инструментарий на языке Python, использующий численное интегрирование.

3. Предварительная оценка моделей. Анализ показывает, что пожизненное страхование даёт наибольшую нетто-премию, временное — меньшую, а чисто накопительное — наименьшую. С увеличением возраста застрахованного премии по рисковым видам растут, а по накопительным — убывают. Рост процентной ставки уменьшает приведённую стоимость всех будущих выплат.

2 Практическая реализация и анализ результатов

Анализ чувствительности нетто-премии. Для количественной оценки влияния параметров на нетто-премию вычислена эластичность

$$E = \frac{\Delta P/P}{\Delta \theta/\theta},$$

показывающая, на сколько процентов изменится премия при изменении параметра на 1%. Результаты для модели Гомпертца (возраст страхователя 40 лет, ставка 15%, страховая сумма 1 млн руб.) представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Эластичность нетто-премии по параметрам (модель Гомпертца)

Параметр	Эластичность
Возраст страхователя x	3,48
Срок страхования n	1,24
Страховая сумма S	1,00
Процентная ставка i	-0,52
Параметр B	0,99
Параметр c (темп старения)	28,44

Наиболее влиятельным параметром является темп старения c : его небольшая ошибка калибровки приводит к многократному изменению премии. Возраст страхователя также сильно влияет на премию (эластичность 3,48), а процентная ставка оказывает умеренное обратное влияние (эластичность -0,52).

Для сравнения, в таблице 2 приведены эластичности нетто-премии для всех четырёх моделей смертности (базовые параметры: возраст 40 лет, ставка 15%, сумма 1 млн руб.).

Таблица 2 – Сравнение эластичности нетто-премии по параметрам для различных моделей

Модель	Эластичность			
	по возрасту x	по ставке i	по сроку n	по параметру c
Де Муавр	0,67	-0,52	0,60	—
Гомпертц	3,48	-0,52	1,24	28,44
Мейкхам	2,06	-0,47	1,00	16,21
Ли–Картер	3,46	-0,50	1,26	—

Видно, что экспоненциальные модели (Гомпертц, Мейкхам, Ли–Картер)

существенно сильнее реагируют на возраст страхователя, чем линейная модель де Муавра. Параметр s (темп старения) в моделях Гомпертца и Мейкхама обладает экстремально высокой эластичностью (28 и 16 соответственно), что делает его критическим для актуарных расчётов. Процентная ставка во всех моделях показывает слабую отрицательную эластичность (около $-0,5$), а срок страхования наиболее значим в динамической модели Ли–Картера (1,26).

Сценарный анализ. Для оценки изменения нетто-премии при различных демографических и экономических условиях рассмотрены три альтернативных сценария относительно базового: «Низкая смертность» (снижение интенсивности смертности на 15%), «Высокая смертность» (рост на 25%) и «Внешний стресс» (добавление фоновой компоненты смертности $A = 0,004$). Расчёты выполнены для пяти типов договоров при возрасте страхователя 40 лет, ставке 15% и сумме 1 млн руб. Усреднённые по четырём моделям результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Среднее отклонение нетто-премии от базового сценария, %

Договор	Низк. смертность	Высок. смертность	Внеш. стресс
Пожизненное	-25,5	+95,3	+142,7
5-летнее срочное	-25,4	+86,7	+172,6
5-летнее смешанное	-0,1	+0,2	+0,3
Пожизненное с отсрочкой 2 г.	-25,5	+97,1	+135,8
Пожизненное с раст. суммой	-24,5	+84,6	+103,9

Наиболее чувствительными к сценариям оказались договоры с длительным сроком страхования (пожизненные и срочные). В сценарии «Внешний стресс» премия по таким договорам может вырасти более чем в 2,5 раза. Напротив, 5-летнее смешанное страхование практически не зависит от сценария, так как дожитие до конца срока при 15%-ной ставке дисконтирования почти гарантировано. Разброс между моделями в базовом сценарии для пожизненного договора достигает 275%, что подтверждает необходимость обоснованного выбора модели смертности.

Калибровка моделей по данным Росстата. По данным Росстата за 2022 год построена эмпирическая таблица смертности для возрастов 0–119 лет. Методом минимизации среднеквадратичной ошибки в логарифмическом

масштабе для интервала 30–84 лет получены следующие калиброванные параметры:

- Модель Гомпертца: $B = 5,27 \times 10^{-5}$, $c = 1,087$;
- Модель Мейкхама: $A = 0,00041$, $B = 3,18 \times 10^{-5}$, $c = 1,092$.

Модель Мейкхама показала наилучшее соответствие эмпирическим данным (MAPE = 10,1%, log-RMSE = 0,121), незначительно превосходя модель Гомпертца. Модель де Муавра (с $\omega = 120$) признана непригодной для описания реальной смертности в России.

Расчёт нетто-премий для пяти типов договоров (возраст 40 лет, ставка 15%, сумма 1 млн руб.) показал, что калиброванные модели дают результаты, близкие к эмпирическим (отклонение не более 5% для большинства договоров). При этом калибровка кардинально меняет оценку по сравнению с «чистыми» параметрами: для пожизненного страхования увеличение премии достигает 840% для модели Гомпертца и 448% для модели Мейкхама.

Гибридная модель Ли–Картера для учёта шоковой смертности. Чистый прогноз модели Ли–Картера, обученной на данных 2012–2019 годов, в пандемийный 2021 год систематически занижает смертность (медианное отношение фактической интенсивности к прогнозной составило 1,38). Для исправления этого предложена гибридная модель, в которой прогноз корректируется возраст-специфичными стресс-множителями.

Построение стресс-множителей. Для каждого возраста x (в интервале 30–84 лет) вычислено отношение фактической интенсивности смерти в 2021 году к прогнозу Ли–Картера:

$$r_x = \frac{m_x^{\text{факт}}}{m_x^{\text{LC}}}.$$

Медианное значение r_x по изученным возрастам составило 1,3845, что означает систематическое занижение прогноза на 38%. Для возрастов старше 84 лет стресс-множитель принят равным медианному значению, а для исключения выбросов все r_x ограничены сверху значением 3,0.

Динамический вариант с затуханием. Для долгосрочных договоров, заключаемых вблизи пика смертности, предложен сценарий линейного затухания стресса за 3 года: в первый год после шока множитель равен r_x ,

во второй год — $r_x \cdot (1 - 1/3) + 1/3$, в третий год — $r_x \cdot (1 - 2/3) + 2/3$, а с четвёртого года стресс полностью исчезает (множитель = 1). В таблице 4 приведено сравнение долгосрочного прогноза для пожизненного договора, заключённого в 2021 году.

Таблица 4 – Нетто-премия (руб.) для пожизненного договора при разных подходах к прогнозу

Модель	Премия
Чистый прогноз Ли–Картера (без коррекции)	33 110
Динамическая гибридная модель (затухание 3 года)	34 847
Статическая гибридная модель (фиксированный шок)	54 492
Фактические данные Росстата за 2021 год	54 515

Учёт временного стресса повышает премию на 5,2% по сравнению с чистым прогнозом, но оставляет её значительно ниже фактического уровня 2021 года, поскольку в динамическом сценарии пик смертности быстро затухает. Это демонстрирует разницу между периодической таблицей смертности (фиксированный год) и когортным прогнозом на весь срок договора.

В статическом варианте гибридная модель восстанавливает фактические нетто-премии с погрешностью менее 0,2%. Введён индекс модельного риска $MRI = \frac{\max P_m - \min P_m}{P_{\text{Росстат}}} \cdot 100\%$. Наибольшая неопределённость выбора модели характерна для пожизненных (21,9%) и отсроченных (24,0%) договоров, тогда как для 5-летнего смешанного страхования она пренебрежимо мала (0,2%).

Практические рекомендации. На основе проведённого анализа сформулированы рекомендации по выбору модели смертности:

- для коротких рискованных договоров в обычных условиях — калиброванная модель Мейкхама или данные Росстата;
- для долгосрочного пожизненного страхования — модель Ли–Картера с регулярной перекалибровкой;
- в периоды кризисов (повышенной смертности) — гибридная модель Ли–Картер со стресс-компонентой;
- смешанное страхование практически не чувствительно к выбору модели, что позволяет использовать любую калиброванную параметрическую модель.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы проведён комплексный анализ моделей долгосрочного страхования жизни — от классических аналитических законов смертности (де Муавра, Гомпертца, Мейкхама) до динамической модели Ли–Картера и её гибридной модификации. Все расчёты выполнены для пяти типов договоров (пожизненное, 5-летнее срочное, 5-летнее смешанное, пожизненное с отсрочкой 2 года и пожизненное с растущей суммой) на основе реальных данных Росстата за 2012–2022 годы.

Основные результаты:

1. **Анализ чувствительности** показал, что критическими параметрами являются темп старения s (эластичность 28,44), возраст страхователя x (эластичность 3,48) и страховая сумма S (эластичность 1,00). Процентная ставка влияет умеренно (эластичность $-0,52$).
2. **Калибровка по данным Росстата** дала параметры: для Гомпертца $B = 5,27 \times 10^{-5}$, $c = 1,087$; для Мейкхама $A = 0,00041$, $B = 3,18 \times 10^{-5}$, $c = 1,092$. Модель Мейкхама оказалась точнее (МАРЕ = 10,1%); модель де Муавра признана непригодной. Калибровка увеличивает премии для долгосрочных договоров в 5–12 раз по сравнению с «чистыми» параметрами.
3. **Прогнозирование смертности** показало, что модель Ли–Картера в спокойные годы ошибается на 5,2%, в шоковые — на 17,8%, но остаётся точнее ML-регрессии (27,6%). Чистый прогноз Ли–Картера в 2021 году занижает смертность на 38% в среднем.
4. **Гибридная модель Ли–Картера** со стресс-множителями восстанавливает фактические нетто-премии с погрешностью менее 0,2%. Предложен динамический вариант с затуханием шока за 3 года. Введённый индекс модельного риска (MRI) показал, что наибольшая неопределённость характерна для пожизненных (21,9%) и отсроченных (24,0%) договоров, наименьшая — для смешанного страхования (0,2%).

Рекомендации по использованию. Для коротких рискованных договоров рекомендуется калиброванная модель Мейкхама или данные Росстата. Для долгосрочного страхования — модель Ли–Картера с регулярной перека-

либровкой. В периоды кризисов — гибридная модель со стресс-компонентой. Смешанное страхование практически не чувствительно к выбору модели.

Направления дальнейших исследований. Перспективным является проведение дисперсионного анализа приведённой стоимости выплат для оценки рисков каждого вида договора с последующим назначением обоснованных риск-надбавок. Гибридная модель может быть расширена на другие сценарии затухания стресса (экспоненциальный, логистический).

Таким образом, цель работы — комплексный анализ моделей долгосрочного страхования жизни с получением количественных оценок, релевантных для российского рынка, — достигнута.