

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра информатики и программирования

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 4 курса 441 группы

направления 02.03.03 — математическое обеспечение и администрирование
информационных систем

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Борисова Владислава Валерьевича

Научный руководитель:

Доцент

подпись, дата

Е. В. Кудрина

Зав. кафедрой:

к. ф.-м. н., доцент

подпись, дата

М. В. Огнева

Саратов 2025

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Актуальность моей темы заключается в широком применении данной задачи в логистике, планировании маршрутов и оптимизации транспортных систем. Эффективные алгоритмы для нахождения оптимального маршрута способствуют снижению затрат и повышению эффективности работы компаний.

Задача коммивояжёра является одной из наиболее известных задач комбинаторной оптимизации. Она имеет как теоретическое значение в области дискретной математики и теории сложности вычислений, так и практические приложения в логистике, проектировании микросхем и биоинформатике. В данном разделе рассматриваются постановка задачи, её историческое развитие, формальное описание в терминах теории графов и математическое обоснование существования решения. Хотя современное название задачи коммивояжёра появилось в XX веке, её аналоги

рассматривались значительно раньше:

— 1800-е годы: Упоминания о проблеме нахождения оптимального маршрута встречаются в работах Уильяма Гамильтона и Томаса Киркмана.

— 1930-е годы: Формальная постановка задачи в работах Карла Менгера и Хасса Уитни.

— 1950-е годы: Активное изучение задачи в связи с развитием линейного программирования.

— 1972 год: Ричард Карп доказал NP-трудность задачи, что установило её фундаментальное значение в теории сложности вычислений.

Задача коммивояжёра относится к классу NP-трудных задач комбинаторной оптимизации. Существует три основных класса методов её

Цель бакалаврской работы – разработка и сравнительный анализ методов решения задачи коммивояжёра с использованием различных алгоритмических подходов, включая точные, приближённые и эвристические методы, а также реализация программного обеспечения для их реализации.

Поставленная цель определила **следующие задачи**:

1. Обзор существующих методов решения.
2. Изучение инструментов и технологий, используемых для реализации методов решения задачи коммивояжёра, включая языки программирования и библиотеки.
3. Реализация алгоритма для генерации взвешенного графа с заданными характеристиками, необходимыми для тестирования методов решения TSP.
4. Реализация алгоритма ветвей и границ для решения задачи коммивояжёра.
5. Реализация алгоритма ближайших соседей и тестирование на различных графах.
6. Реализация метода 2-opt для улучшения найденного решения задачи коммивояжёра.
7. Сравнительный анализ всех реализованных методов по времени выполнения, качеству решений и использованной памяти, таблицы и графики для наглядности.

Методологические основы исследование методов решения задачи коммивояжёра представлены в работах Miller, C. E., Held, M. A, Christofides, N., Иванов, П. С., Ландо, С. К., Cook, W., Пападимитриу, X., Little, J. D. С., Lawler, E. L., Applegate, D. L., Корнеев, Н. М., Пшеничный, Б. Н. , Иванов, П. К., Rosenkrantz, D. J..

Теоретическая и практическая значимость бакалаврской работы.

Теоретическая значимость.

Исследование методов решения задачи коммивояжёра в бакалаврской работе способствует углублению знаний в области оптимизации и комбинаторной математики. Работа анализирует существующие алгоритмы, что помогает выявить их преимущества и недостатки, а также способствует развитию новых теорий в этой области.

Практическая значимость

Решение задачи коммивояжёра имеет широкий спектр применения в логистике, транспортировке и планировании маршрутов. Эффективные

решения способствуют экономии ресурсов и времени в реальных проектах. Практическая реализация методов из исследования может быть использована в бизнесе для оптимизации процесса доставки. Это делает работу актуальной и полезной для крупных компаний и малого бизнеса.

Структура и объём работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 2 разделов, заключения, списка использованных источников и 4 приложений. Общий объём работы – 67 страниц, из них 46 страниц – основное содержание, включая 5 рисунков и 7 таблиц, цифровой носитель в качестве приложения, список использованных источников информации – 21 наименование.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Теоретический» посвящен получению всех предварительных сведений, связанных с теоретическими основами решения задачи коммивояжера.

Краткое содержание

В данном разделе рассматриваются методы решения задачи коммивояжера с акцентом на различные подходы и инструменты. Определены три класса методов:

1. Точные методы обеспечивают оптимальное решение, но имеют высокую вычислительную сложность (например, метод полного перебора, ветвей и границ, динамическое программирование).
2. Приближённые методы предлагают решения близкие к оптимальным с гарантированной точностью (например, алгоритм Кристофидеса).
3. Эвристические методы быстро находят решение, но без гарантии качества (например, жадные и генетические алгоритмы).

Для визуализации и анализа предлагаются инструменты, такие как Matplotlib, NetworkX и Google Maps API. Выбор методов зависит от размера задачи, требуемой точности и скорости работы. Часто используется комбинация методов для достижения лучших результатов. Сравнительный анализ показывает различия между классами по гарантиям оптимальности, временной сложности и сложности реализации.

Методы решения задачи коммивояжёра

Эвристические и точные методы играют ключевую роль в решении задачи коммивояжёра (TSP). Рассмотрим выбранные методы:

Метод ветвей и границ

- Представление задачи: граф с весами рёбер.
- Ветвление: исследование всех возможных продолжений частичного пути, создание подграфа.
- Оценка: нижняя граница вычисляется на основе пройденных рёбер и минимальных весов для непосещённых вершин.
- Отсечение: исключение ветвей с низкой оценкой.

Алгоритм ближайших соседей

- Начало с произвольной вершины, добавление ближайшей непосещённой.
- Оптимально строит маршруты, используя локальную информацию.

2-opt оптимизация

- Локальная модификация цикла, перестановка рёбер.
- Эффективна для симметричных графов, может комбинироваться с другими методами.

Инструментальные средства

Python и C++ для реализации, библиотеки OR-Tools, Gurobi, и другие для оптимизации.

Теоретическая часть

Постановка задачи коммивояжёра

Задача формулируется следующим образом: дано n городов и расстояния между парами. Необходимо найти кратчайший маршрут, проходящий через каждый город ровно один раз и возвращающийся в начальную точку. Это эквивалентно поиску гамильтонова цикла минимальной длины в полном взвешенном графе. Формально задача представляется так:

- Полный взвешенный граф $G = (V, E)$:
 - V - множество городов
 - E - множество рёбер (путей)
 - w_{ij} - вес ребра (расстояние между городами)

Требуется минимизировать вес гамильтонова цикла, определяемый формулой (при условиях о степени вершин и связности).

Доказательство существования решения

В полном графе всегда существует хотя бы один гамильтонов цикл, а число таких циклов конечно. По теореме Вейерштрасса, существует цикл с минимальным весом. Проблема относится к классу NP-трудных задач, поэтому используются:

- Точные методы: метод ветвей и границ, динамическое программирование

- Эвристики: жадные, генетические алгоритмы
- Приближенные алгоритмы: алгоритм Кристофидеса.

Методы решения задачи коммивояжера

Точные методы (например, динамическое программирование) обеспечивают оптимальные решения, но имеют высокую сложность. Приближенные методы (алгоритм Кристофидеса) дают близкие к оптимальным решения. Эвристические методы (жадные алгоритмы, генетические) работают быстрее, но без гарантии качества.

Сравнительный анализ методов

Характеристика	Точные	Приближённые	Эвристические
Гарантия оптимальности	Да	Частичная	Нет
Временная сложность	Экспоненциальная	Полиномиальная	Полиномиальная
Область применения	Малые n	Средние n	Большие n
Простота реализации	Сложно	Средне	Просто

Обоснование выбора методов

Точный метод - алгоритм "ветвей и границ", проще в реализации и подходит для задач среднего размера. Приближённый метод - алгоритм ближайшего соседа, который легко реализовать и он даёт разумные решения

Второй раздел «Практический» посвящен описанию программной реализации изученных методов и проведению экспериментов.

Создание эффективного программного обеспечения для решения задачи коммивояжера включает в себя как теоретические основы, так и их практическое применение.

В первой подглаве мы сосредоточились на генерации и визуализации взвешенных графов, что является важной частью для понимания структуры задач, которые мы будем решать.

При создании класса `WeightedGraphGenerator` была реализована функция, позволяющая не только генерировать графы с произвольным количеством вершин и рёбер, но и визуализировать их с использованием библиотеки `matplotlib`. Это позволяет наблюдать за различными конфигурациями графов, что особенно полезно для анализа структуры маршрутов, которые мы будем исследовать. Визуализация включает в себя вывод матриц смежности, которые показывают связи между вершинами и могут быть использованы для дальнейшего анализа.

В алгоритме ветвей и границ, описанном во второй подглаве, представлен подход, который находит оптимальные решения задачи коммивояжера путем систематического перебора возможных маршрутов с отбраковкой неэффективных решений на ранних этапах. В процессе реализации класса `TSPSolver` был внедрен ряд ключевых методов. Метод инициализации настраивает исходные параметры, включая количество городов, их координаты и матрицу расстояний. Далее следует этап редукции, где производится упрощение матрицы расстояний с целью минимизации значений, что существенно сокращает количество рассматриваемых вариантов.

Рекурсивная функция, реализующая сам алгоритм, использует стратегию минимизации текущих затрат на основе уже пройденного пути, а также учитывает ограничения и условия, которые помогают избежать повторных посещений одних и тех же городов. В результате вычислительные

ресурсы используются более эффективно, что позволяет решать задачи с большим количеством вершин за приемлемое время.

Переходя ко второй части работы, мы детально рассмотрели жадный алгоритм ближайших соседей. Этот метод, хотя и не всегда дает оптимальные решения, но его реализация оказалась достаточно простой и быстрой. Класс, который мы разработали для этой цели, демонстрирует, как можно эффективно находить приближенные маршруты. Алгоритм начинается с произвольной вершины и на каждом шаге выбирает ближайший непосещенный город, что создает маршрут, который вполне жизнеспособен для большинства практических применений.

В третьей части работы был представлен алгоритм 2-opt, который служит для улучшения ранее найденных маршрутов. Он работает на принципе разбиения маршрута на две части и их перестановки для снижения общей длины пути. Этот простой, но эффективный эвристический метод позволяет значительно улучшить результаты, полученные жадным алгоритмом, что делает его важным дополнением к практическому программному обеспечению.

Таким образом, выводы по разделу подчеркивают успешную реализацию нескольких алгоритмов, которые не только служат для решения задачи коммивояжера, но и предостерегают от возможных ошибок и недочетов в подходах, основанных на жадных алгоритмах. Результаты, полученные с помощью приближённых и эвристических методов, показывают, как разнообразные подходы могут дополнять друг друга, обеспечивая более полное понимание проблемы и возможности для её решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе было проведено исследование методов решения задачи коммивояжёра, одной из ключевых задач комбинаторной оптимизации. Работа объединила теоретический анализ и практическую реализацию трёх основных подходов к решению: точного метода ветвей и границ, приближённого метода ближайших соседей и эвристического метода 2-opt.

Теоретическая часть работы включала формальную постановку задачи в терминах теории графов, классификацию методов решения (точные, приближённые, эвристические) и их сравнительный анализ а также обоснование выбора конкретных алгоритмов для реализации, с учётом их эффективности, простоты и применимости к задачам разного масштаба.

Практическая часть состояла из генерации взвешенных графов с заданными характеристиками (полные, случайные, евклидовы), что позволило создать тестовые данные для алгоритмов.

Реализации методов: метод ветвей и границ продемонстрировал высокую точность, но ограниченную применимость для больших графов из-за экспоненциальной сложности, метод ближайших соседей показал быстроту работы и приемлемое качество решений, что делает его полезным для задач средней размерности. Наконец, метод 2-opt подтвердил свою эффективность в улучшении начальных решений, особенно в комбинации с другими алгоритмами.

Основные выводы:

Для малых графов (до 15 вершин) метод ветвей и границ остаётся оптимальным выбором, гарантируя точное решение. При увеличении размера задачи предпочтение следует отдавать комбинации приближённых и эвристических методов (например, ближайший сосед + 2-opt), что обеспечивает баланс между скоростью и качеством решения. Евклидовы графы, благодаря метрическим свойствам, позволяют добиться лучших результатов при использовании локальных оптимизаций, таких как 2-opt. Перспективы развития работы: исследование гибридных алгоритмов,

сочетающих преимущества разных методов. Применение современных технологий (машинное обучение, параллельные вычисления) для ускорения работы алгоритмов. Адаптация методов для решения вариаций (например, с временными окнами или динамическими условиями).

Заключительная оценка: работа достигла поставленных целей, продемонстрировав как теоретическую значимость задачи коммивояжёра, так и её практическую применимость в логистике, транспорте и других областях. Реализованные алгоритмы могут служить основой для дальнейших исследований и оптимизаций, а также использоваться в учебных целях для изучения методов комбинаторной оптимизации.

Основные источники информации:

1. Held, M. A dynamic programming approach to sequencing problems / M. Held, R. M. Karp // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. — 1962. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 196–210.
2. Miller, C. E. Integer programming formulation of traveling salesman problems / C. E. Miller, A. W. Tucker, R. A. Zemlin // Journal of the ACM. — 1960. — Vol. 7, no. 4. — Pp. 326–329.
3. Christofides, N. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem / N. Christofides // Technical Report. — 1976. — Also published in: Traub, J. F. (ed.) (1976) Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity. Academic Press, New York, pp. 441. <https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/ADA025602.pdf>.
4. Ландо, С. К. Задача коммивояжёра / С. К. Ландо. — М.: МЦНМО, 2017. — С. 256.
5. Литвинов, В. А. Алгоритм ветвей и границ для решения задачи коммивояжёра / В. А. Литвинов, И. С. Петров // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 3. — С. 456–470.

6. Иванов, П. С. Применение методов ветвей и границ в задачах дискретной оптимизации: дис. ... канд. физ.-мат. наук / СПбГУ. — СПб., 2018. — С. 145.
7. Корнеев, Н. М. Локальные методы оптимизации маршрутов коммивояжёра / Н. М. Корнеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1993. — Т. 33, № 5. — С. 752–763.
8. Пшеничный, Б. Н. Методы оптимизации в задачах маршрутизации / Б.Н. Пшеничный, В. А. Трубин. — М.: Наука, 2005. — С. 112–130. — Раздел: "Алгоритм 2-opt и его модификации».
9. Лоулер, Е. Л. Теория расписаний и задачи коммивояжёра / Е. Л. Лоулер, Дж. К. Ленстра, А. Х. Г. Кан. — М.: Мир, 1985. — С. 360. — Пер. с англ.