

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории упругости и биомеханики

**Исследование решения краевой задачи для эллиптического
погранслоя в цилиндрической оболочке**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Здоркина Арсения Германовича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент

И.В. Кириллова

Зав. кафедрой
зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

Л.Ю. Коссович

Саратов 2025

Актуальность темы: разработка аналитических и численных моделей взаимодействия ударных волн с конструкциями из тонкостенных оболочек является важной задачей механики деформируемого твердого тела. Цилиндрические оболочки, как элементы несущих конструкций, широко применяются в машиностроении, авиации, ракетостроении и других отраслях. Учет локальных эффектов, таких как пограничные слои и фронты волн, особенно актуален при кратковременных динамических воздействиях. В условиях высоких скоростей и коротких импульсов внешней нагрузки классические модели не всегда дают удовлетворительные результаты, что требует применения асимптотических и приближенных методов анализа. Поэтому тема, связанная с исследованием эллиптических пограничных слоев при различных типах ударных нагрузок, является своевременной и практически значимой.

Введение. В настоящей работе рассматриваются задачи распространения нестационарных волн в цилиндрических оболочках при кратковременных ударных воздействиях.

Актуальность исследования определяется тем, что тонкие оболочки вращения широко применяются в современных инженерных конструкциях, подверженных импульсным нагрузкам (например, взрывным воздействиям, ударным контактам, вибрационным процессам). Возникающие при этом волновые процессы сопровождаются формированием пограничных слоёв различной природы — гиперболического, параболического и эллиптического типов, каждый из которых описывает определённые особенности напряжённо-деформированного состояния (НДС).

Особое внимание в работе уделено эллиптическим пограничным слоям, которые возникают при нормальных воздействиях на торцевые и боковые поверхности оболочки. Такие слои характеризуются сложной структурой затухающих решений и требуют применения асимптотических методов анализа. Изучение краевых задач для эллиптического пограничного слоя позволяет глубже понять структуру затухающего волнового поля и уточнить применимость классических приближённых моделей теории оболочек.

Цель работы заключается в исследовании краевых задач для эллиптического пограничного слоя в цилиндрической оболочке, построении асимпто-

тических решений и анализе полученных результатов в сравнении с классическими теориями.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Изучить метод сращиваемых разложений и его применение к динамическим задачам теории оболочек.
2. Рассмотреть низкочастотные приближения (теорию Кирхгофа–Лява) и выделить их область применимости.
3. Описать гиперболические и параболические пограничные слои, возникающие вблизи фронтов волн.
4. Построить постановку краевых задач для эллиптического пограничного слоя в цилиндрической оболочке.
5. Получить уравнения эллиптического слоя при ударных воздействиях на лицевые поверхности и на торцы оболочки.
6. Найти решения указанных краевых задач с использованием интегральных преобразований и асимптотических методов.

Бакалаврская работа состоит из 11 разделов.

В первом разделе рассмотрен метод сращиваемых разложений, позволяющий описывать процессы распространения волн в тонких оболочках с учётом различных масштабов изменчивости и динамичности.

Во втором разделе приведены низкочастотные приближения (теория Кирхгофа–Лява) для симметричных и антисимметричных задач, показано соответствие с классическими безмоментными и изгибными теориями.

В третьем разделе выделены компоненты параболического пограничного слоя, описывающего переходные зоны затухающих волн, и показано, как он согласуется с решениями в других областях.

В четвёртом–шестом разделах исследованы волновые процессы при различных типах ударных воздействий:

- LT-нагружение (продольное тангенциального типа),
- LM-нагружение (продольное изгибающего типа),
- NW-нагружение (нормальное торцевое).

Для каждого типа построены схемы расчленения напряжённо-деформированного состояния на составляющие, выделены области применимости приближённых теорий и пограничных слоёв.

В седьмом разделе сформулированы постановки краевых задач для эллиптического пограничного слоя в цилиндрических оболочках, рассматриваются граничные условия при воздействиях на лицевые и торцевые поверхности.

В восьмом и девятом разделах получены уравнения эллиптического пограничного слоя при ударных воздействиях на лицевые и торцевые поверхности.

В десятом и одиннадцатом разделах решены соответствующие краевые задачи. Решения получены с использованием преобразований Лапласа и Фурье, приведены явные выражения для перемещений и напряжений в зоне эллиптического пограничного слоя, а также выполнен анализ их асимптотического поведения.

Постановка краевых задач для эллиптического пограничного слоя в цилиндрических оболочках Рассматривается цилиндрическая оболочка, представленная на рисунке 1, с двумерной системой координат (α, t, z) , где α – длина дуги вдоль образующей срединной поверхности, z – внешняя нормаль к срединной поверхности. Напряжения и перемещения оболочки обозначены, как σ_{ij} и ν_{ij} ($i=1,2,3$) соответственно.

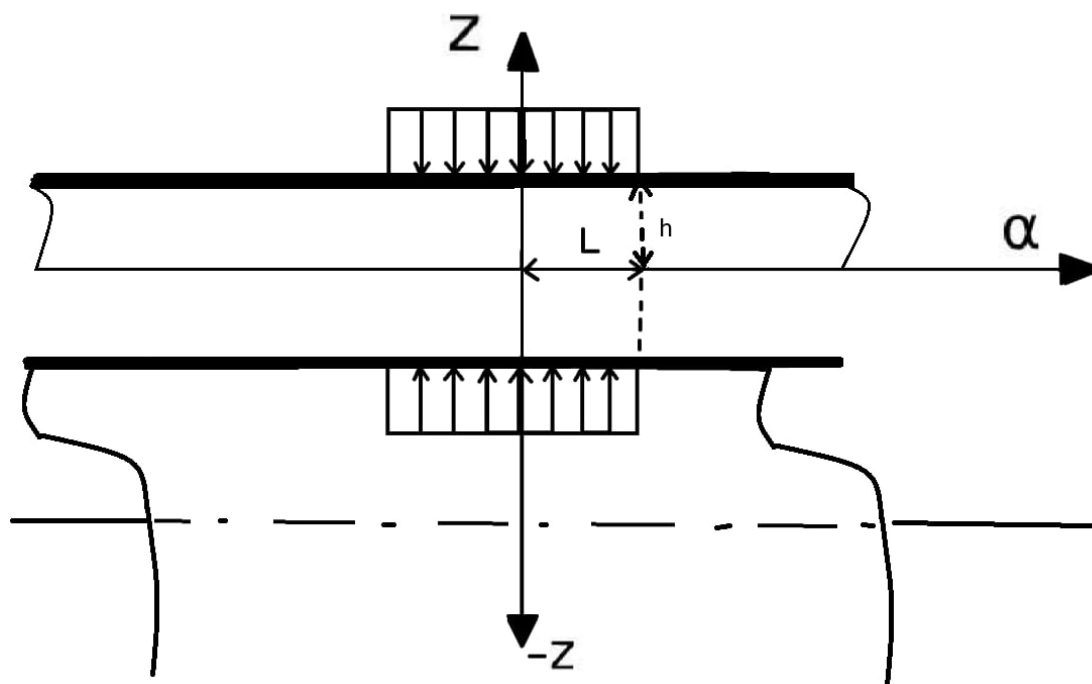


Рисунок 1 — Полубесконечная цилиндрическая оболочка.

Рассматриваются граничные условия для оболочки. Один вид определяет ударное воздействие на лицевые поверхности бесконечной оболочки $z=\pm h$ (h – полутолщина оболочки), задаваемое граничными условиями:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= -P(\alpha, t), & \sigma_{13} &= 0 & \text{при } z = \pm h, |\alpha| \leq L, \\ \sigma_{33} &= 0, & \sigma_{13} &= 0 & \text{при } z = \pm h, |\alpha| > L. \end{aligned} \quad (1.1)$$

При этом рассматриваются однородные начальные условия ($i=1,2,3$) при $t=0$:

$$\nu_i = \frac{\partial \nu_i}{\partial t} = 0.$$

Второй вид граничных условий описывает ударное воздействие на торец и имеет вид:

$$\sigma_{13} = I H(t), \quad \nu_1 = 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \quad (1.2)$$

где I – амплитуда нагрузки, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда. Начальные условия принимаются однородными, а лицевые поверхности считаются свободными от напряжений:

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } z = \pm h.$$

Рассматривается эллиптический погранслои в цилиндрической оболочке в случае ударного воздействия на лицевые поверхности, где нагрузка P определяется следующим образом

$$P = \begin{cases} p H(\tau), & |\xi| < L, \\ 0, & \xi > L. \end{cases}$$

Применяется преобразование Лапласа и Фурье :

$$\psi^L = \int_0^\infty \psi e^{-s\tau} d\tau, \quad \varphi^F(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) e^{-i\chi\xi} d\xi.$$

Происходит переход к выводу разрешающего уравнения относительно изображения ψ^L : Умножается первое выражение из исходной системы на $e^{s\tau}$,

а затем интегрируются обе части выражения.

$$\int_0^\infty (\mathfrak{a}_R^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}) e^{-s\tau} d\tau = \int_0^\infty (\frac{(1+\nu)h}{E} \frac{\mathfrak{a}_R B_\omega}{b} P) e^{-s\tau} d\tau.$$

Преобразование от производных ψ по ξ имеют вид:

$$\int_0^\infty (\frac{\partial \psi}{\partial \xi}) e^{-s\tau} d\tau = (\frac{\partial \psi^L}{\partial \xi}),$$

$$\int_0^\infty (\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}) e^{s\tau} d\tau = (\frac{\partial^2 \psi^L}{\partial \xi^2}).$$

Преобразование от производных ψ по τ имеют вид:

$$\int_0^\infty (\frac{\partial \psi}{\partial \tau}) e^{-s\tau} d\tau = s\psi^L,$$

$$\int_0^\infty (\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}) e^{s\tau} d\tau = s^2\psi^L.$$

Для удобства обозначается K :

$$K = -\frac{(1+\nu)h}{E} \frac{\mathfrak{a}_R B_\omega}{b}.$$

После преобразований Лапласа и Фурье исходные уравнения принимают вид:

$$-a^2 \chi^2 \varphi^{LF} + \frac{\partial^2 \varphi^{LF}}{\partial \xi^2} = 0, \quad (1.3)$$

$$-b^2 \chi^2 \psi^{LF} + \frac{\partial^2 \psi^{LF}}{\partial \xi^2} = 0, \quad (1.4)$$

$$-\mathfrak{a}_R^2 \chi^2 \psi^{LF} - s^2 \psi^{LF} = -K P^{LF}, \quad \zeta = -1, \quad (1.5)$$

$$-(a + \frac{\mathfrak{a}_R^2 \mathfrak{a}^2}{2a}) \chi^2 \varphi^{LF} - s^2 \frac{\mathfrak{a}^2}{2a} \varphi^{LF} + (g + \frac{\mathfrak{a}_R^2}{2}) \chi^2 \psi^{LF} - \frac{s^2}{2} \psi^{LF} = 0, \quad \zeta = -1, \quad (1.6)$$

$$\sigma_{33}^{\text{LF}} = \frac{E}{(1+\nu)\hbar} \left[\left(g + \frac{\mathfrak{a}_R^2}{2} \right) \chi^2 + \frac{s^2}{2} \right] \varphi^{\text{LF}} + \left[\left(b + \frac{\mathfrak{a}_R^2}{2b} \right) \chi^2 + \frac{s^2}{2b} \right] \psi^{\text{LF}}, \quad (1.7)$$

$$P^{LF} = \frac{\sin(\chi L)}{\chi(\mathfrak{a}_R^2 \chi^2 + s^2)}. \quad (1.8)$$

Преобразовывается выражение (1.5) так, чтобы в левой части было ψ_0^{LF} и получается

$$\psi_0^{LF} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K p \frac{\sin(\chi L)}{s \chi(\mathfrak{a}_R^2 \chi^2 + s^2)}. \quad (1.9)$$

Решая уравнение (1.7) относительно φ_0^L , получается:

$$\varphi_0^{LF} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K p \frac{g}{a} \frac{\sin(\chi L)}{s \chi(\mathfrak{a}_R^2 \chi^2 + s^2)}. \quad (1.10)$$

Решая дифференциальные уравнения (10.1), (10.2), получится :

$$\psi^{\text{LF}} = \psi_0^{LF} e^{\pm b \chi (1+\zeta)}, \quad (1.11)$$

$$\varphi^{\text{LF}} = \varphi_0^{LF} e^{\pm a \chi (1+\zeta)}, \quad (1.12)$$

где знак «+» при $\chi > 0$ и «-» при $\chi < 0$.

Подставляются выражения (1.9) и (1.10) в (1.11) и (1.12) соответственно, получается:

$$\psi^{LF} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K p \frac{\sin(\chi L)}{s \chi(\mathfrak{a}_R^2 \chi^2 + s^2)} e^{\pm b \chi (1+\zeta)}, \quad (1.13)$$

$$\varphi^{LF} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K p \frac{g}{a} \frac{\sin(\chi L)}{s \chi(\mathfrak{a}_R^2 \chi^2 + s^2)} e^{\pm a \chi (1+\zeta)}. \quad (1.14)$$

Подставив (1.13) и (1.14) в (1.8) находится изображение относительно σ_{33} :

$$\sigma_{33}^{\text{LF}} = \frac{E}{(1+\nu)\hbar} \sqrt{\frac{2}{\pi}} K p \left[\left[\left(g + \frac{\mathfrak{a}_R^2}{2} \right) \chi^2 + \frac{s^2}{2} \right] \frac{g}{a} \frac{\sin(\chi L)}{s \chi(\mathfrak{a}_R^2 \chi^2 + s^2)} e^{\pm a \chi (1+\zeta)} \right]$$

$$+ \left[\left(b + \frac{\mathfrak{x}_R^2}{2b} \right) \chi^2 + \frac{s^2}{2b} \right] \frac{\sin(\chi L)}{s \chi (\mathfrak{x}_R^2 \chi^2 + s^2)} e^{\pm b \chi (1+\zeta)}. \quad (1.15)$$

Асимптотический анализ оригиналов изображений показывает, что иско-
мое изображение может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = p \frac{B_\omega}{\sqrt{2\pi} \mathfrak{x}_R} & \left[- \operatorname{arctg} \left(\frac{2L a (1 + \zeta)}{a^2 (1 + \zeta)^2 - L^2 + (\xi - \mathfrak{x}_R \tau)^2} \right) \right. \\ & \left. + \operatorname{arctg} \left(\frac{2L b (1 + \zeta)}{b^2 (1 + \zeta)^2 - L^2 + (\xi - \mathfrak{x}_R \tau)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Выражение для σ_{13} не позволяет использовать интегральное преобразо-
вание Фурье по продольной координате. В этом случае используется альтер-
нативная форма:

$$\mathfrak{x}_R^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} = \frac{\mathfrak{x}_R B_\omega}{g} \frac{\partial S}{\partial \xi}, \quad \zeta = -1,$$

$$\left(g + \frac{\mathfrak{x}_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \left(b + \frac{\mathfrak{x}_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2b} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = 0, \quad \zeta = -1, \quad (1.17)$$

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + b \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad v_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{1}{b} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi} = \frac{E}{(1 + \nu)} \left(\left(\frac{2 - \mathfrak{x}^2 \mathfrak{x}_R^2}{2a} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\mathfrak{x}^2}{2a} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} \right), \quad (1.18)$$

$$\Phi = \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}, \quad \Psi = \frac{1}{b} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}.$$

При этом функция S имеет вид

$$S = \begin{cases} I H(\tau - \xi), & \xi > 0, \\ I H(\tau + \xi), & \xi < 0. \end{cases}$$

После этого рассматриваются выражения относительно σ_{13} , где так же применяются преобразования Лапласа и Фурье:

$$\sigma_{13}^{\text{LF}} = i \frac{E}{(1+\nu)h} \frac{1}{\chi} \left[\left(\frac{2 - \mathfrak{e}^2 \mathfrak{e}_R^2 \chi^2 + \mathfrak{e}^2 s^2}{2a} \right) \varphi^{LF} + \left(\chi^2 + \frac{s^2}{2} \right) \psi^{\text{LF}} \right]. \quad (1.19)$$

Решение происходит аналогично предыдущей задаче:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{\text{LF}} = & -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} I \frac{\mathfrak{e}_R B_\omega}{g} \left[\left(\frac{g \chi^3}{s(\mathfrak{e}_R^2 \chi^2 + s^2)(s^2 + \chi^2)} + \right. \right. \\ & + \left(\frac{\mathfrak{e}^2 g}{2a^2} + \frac{g}{2b^2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\chi}{s(s^2 + \chi^2)} \Big) e^{\pm \alpha \chi(1+\zeta)} - \left(\frac{g \chi^3}{s(\mathfrak{e}_R^2 \chi^2 + s^2)(s^2 + \chi^2)} \right. \\ & \left. \left. + \frac{\chi}{2s(s^2 + \chi^2)} \right) e^{\pm \beta \chi(1+\zeta)} \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Асимптотический анализ оригиналов изображений показывает, что искомое изображение может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = & -I + \frac{B_\omega}{\pi \mathfrak{e}_R b^2} \left[-\arctan\left(\frac{2a \xi (1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \mathfrak{e}_R^2 \tau^2} \right) \right. \\ & \left. + \arctan\left(\frac{2b \xi (1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \mathfrak{e}_R^2 \tau^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Заключение В работе проведено исследование краевых задач для эллиптического пограничного слоя в цилиндрической оболочке.

Основные результаты заключаются в следующем:

- Обобщён метод сращиваемых разложений для описания нестационарных процессов в оболочках при ударных воздействиях.

- Построены модели гиперболического, параболического и эллиптического пограничных слоёв, показаны области их применимости и согласования с классическими теориями.

- Для цилиндрических оболочек получены уравнения эллиптического пограничного слоя при воздействиях на лицевые и торцевые поверхности.

- Найдены аналитические решения краевых задач для эллиптического слоя; показано, что они уточняют классическую картину распределения напряжений и деформаций, особенно в зонах, где двумерные теории оказываются недостаточными.

- Установлено, что учёт эллиптического пограничного слоя позволяет корректно описывать структуру затухающего волнового поля и повышает точность прогнозирования напряжённо-деформированного состояния оболочек при импульсных нагрузках.

Результаты работы могут быть использованы при дальнейшем развитии асимптотических методов в динамике оболочек, а также в прикладных задачах расчёта прочности и надёжности тонкостенных конструкций, подверженных кратковременным ударным воздействиям.