МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

Динамика решетки нелокально связанных отображений Эно-Лози

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 4032 группы
направления 03.03.03 Радиофизика
Института физики
Захарова Сергея Петровича

Научный руководитель
зав. кафедрой, д.ф.-м.н., доцент ____________________ Г.И. Стрелкова

Зав. кафедрой радиофизики
и нелинейной динамики,
д.ф.-м.н., доцент ____________________ Г.И. Стрелкова

Саратов 2025 г.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование ансамблей связанных нелинейных элементов представляет значительный интерес в контексте междисциплинарных исследований сложных систем, охватывающих такие области, как физика, биология, нейрофизиология и инженерные науки. Эти ансамбли, рассматриваемые как сложные системы, демонстрируют широкий спектр динамических режимов, обусловленных нелинейным взаимодействием между составляющими элементами. Разнообразие этих режимов, от полной синхронизации до некогерентности, определяется не только свойствами отдельных элементов, но и структурой связей между ними**.** Изучение этих систем позволяет выявить общие принципы организации и функционирования, применимые к широкому классу сложных объектов.

В данной выпускной квалификационной работе изучается динамика решетки нелокально связанных отображений. В качестве парциальных элементов выбраны отображения Эно-Лози, которые при разных значениях управляющих параметрах могут демонстрировать как динамику близкую к динамике отображения Эно, так и к динамике отображения Лози.

Целью данной работы является изучение и выявление особенностей эволюции пространственно-временных структур, в частности химерных и уединенных состояний, в решетках нелокально связанных отображения Эно-Лози. Для достижения этой цели были поставлены следующие **задачи**:

1) Построение карт режимов решетки нелокально связанных отображений Эно-Лози при различных значениях управляющих параметров;
2) Исследование динамики во времени и пространстве режимов, формирующихся в системе;
3) Выявление особенностей системы.

Для выполнения поставленных задач применялось компьютерное моделирование, которое включало в себя написание программного кода на языке программирования C, и визуализацию полученных данных с помощью программы Gnuplot.

Раздел 1 «Литературный обзор» включает краткий аналитический обзор научных источников, соответствующих тематике исследования. Раздел включает два подраздела, названия которых отражают их содержание: подраздел 1.1 «Динамика одиночных отображений Лози, Эно, Эно-Лози» и подраздел 1.2 «Динамика одномерного ансамбля нелокально связанных отображений Эно-Лози».

В разделе 2 «Исследование динамики решетки нелокально связанных отображений Эно-Лози» посвящен описанию исследовательской части работы. В подразделе 2.1 «Исследуемая модель и методы» подробным образом описывается исследуемая система решетки нелокально связанных отображений Эно-Лози и объясняется назначение параметров системы. В подразделе 2.2 «Влияние параметров связи между элементами на динамику исследуемой сети» продемонстрирована карта режимов при параметрах $\varepsilon = 0.2$ и $a=1.7$ в качестве примера расположения областей с различной динамикой, а также для подробного описания каждого из выявленных режимов. В подразделе 2.3 «Влияние управляющих параметров парциальных элементов на динамику исследуемой сети» приведены карты режимов при различных значениях управляющих параметров, показывающие зависимость динамики системы от параметров.

Исследуемая модель

В работе было предложено рассматривать в качестве базовых моделей в ансамблях нелокально связанных хаотический осцилляторов дискретные системы Эно и Лози. Отображение Эно (1) и Лози (2) имеют вид:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 1 - a^{Henon}x^2(n) + y(n) \\ y(n+1) &= \beta^{Henon}x(n) \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 1 - a^{Lozi}|x(n)| + y(n) \\ y(n+1) &= \beta^{Lozi}x(n) \end{aligned} \qquad (2)$$

где n — дискретное время. Оба отображения являются двумерными и содержат по два управляющих параметра: α и β. Параметр α управляет нелинейностью, а параметр β характеризует степень сжатия элемента фазового пространства на плоскости фазовых переменных (x, y).

Отображение (1) служит достаточно общей моделью систем с хаотическим аттрактором, возникающим через каскад удвоения периода. Отображение Лози (2) было специально введено для описания структуры и свойств аттрактора Лоренца в области значений параметров, отвечающих случаю почти гиперболического хаотического аттрактора и характеризуется отсутствием мультистабильности.

Если использовать отображение Эно и Лози в качестве индивидуальных осцилляторов ансамблей, то можно моделировать пространственно-временную динамику в достаточно широком классе хаотических систем.

Далее рассмотрим предложенную в работе систему уравнений отображения Эно-Лози (3).

$$\begin{cases} x(n+1) = 1 - a^{HL}S_{\varepsilon}\big(x(n)\big) + y(n) \\ y(n+1) = \beta^{HL}x(n) \end{cases}, \quad S_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } |x| \geq \varepsilon \\ \dfrac{x^2}{2\varepsilon} + \dfrac{\varepsilon}{2}, & \text{если } |x| \leq \varepsilon \end{cases} \qquad (3)$$

где x и y – динамические переменные, n является дискретным временем (подразумевается номер итерации), $\alpha^{H-L} \in \mathbb{R}$, $\beta^{H-L} \neq 0 \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon < 1$ являются управляющими параметрами. В зависимости от значения ε система переходит либо в отображение Лози, либо в отображение Эно. Данную систему уравнений (3) будем рассматривать как базовый элемент ансамбля.

Теперь перейдем к рассмотрению системы уравнений решетки 200×200 элементов нелокально связанных отображений Эно-Лози, динамика которой исследуется в данной выпускной квалификационной работе:

$$\begin{cases} x_{i,j}(n+1) = f\left(x_{i,j}(n), y_{i,j}(n)\right) + +\frac{\sigma}{M}\sum_{k=i-R}^{i+R}\sum_{l=j-R}^{j+R}\left[f\left(x_{k,l}(n), y_{k,l}(n)\right) - f\left(x_{i,j}(n), y_{i,j}(n)\right)\right] \\ y_{i,j}(n+1) = g\left(x_{i,j}(n), y_{i,j}(n)\right) \end{cases} \quad (4)$$

где $x_{i,j}, y_{i,j}$ – динамические переменные, i,j – координаты элемента, n – номер итерации, функции $f\left(x_{i,j}(n), y_{i,j}(n)\right)$, $g\left(x_{i,j}(n), y_{i,j}(n)\right)$ соответствуют правым частям уравнений, описывающих динамику одиночного отображения Эно-Лози:

$$f\left(x_{i,j}(n), y_{i,j}(n)\right) = 1 - \alpha^{H-L} S_\varepsilon\left(x(n)\right) + y(n),$$
$$g\left(x_{i,j}(n), y_{i,j}(n)\right) = \beta^{H-L} x(n),$$
$$S_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } |x| \geq \varepsilon \\ \frac{x^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}, & \text{если } |x| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Второе слагаемое в уравнении (4) отвечает за нелокальную связь между элементами с силой связи σ, M – общее количество элементов с которым связан i,j–элемент, и R – радиус связи. В описанной выше математической модели (4) может быть использована либо диффузионная связь, либо инерционная.

Для выбора значений управляющих параметров отображений Эно-Лози использовалась карта распределения старшего показателя Ляпунова на плоскости параметров (α^{HL}, ε), которая приведена в работе.

Практическая часть

Исследование динамики решетки нелокально связанных отображений Эно-Лози при вариации управляющих параметров позволило построить карты режимов на плоскости параметров связи «радиус связи – сила связи» при различных значениях управляющих параметров парциальных элементов, а именно ε и а, при этом значение параметра β было зафиксировано на 0.5 Рассмотрим одну из этих карт режимов при фиксированных управляющих параметрах ε=0.200 и a=1.7 (рисунок 1).

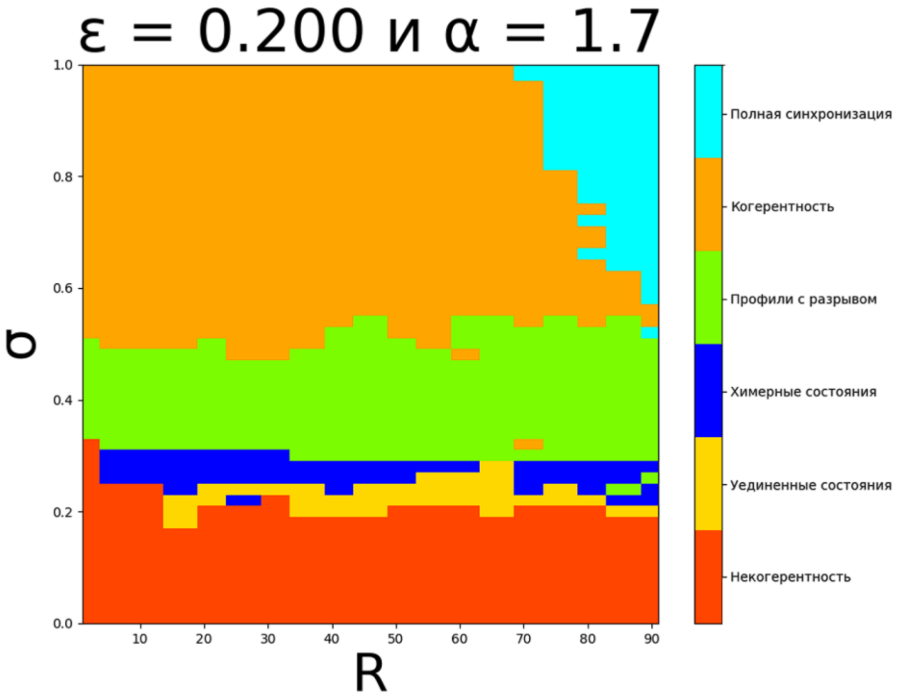
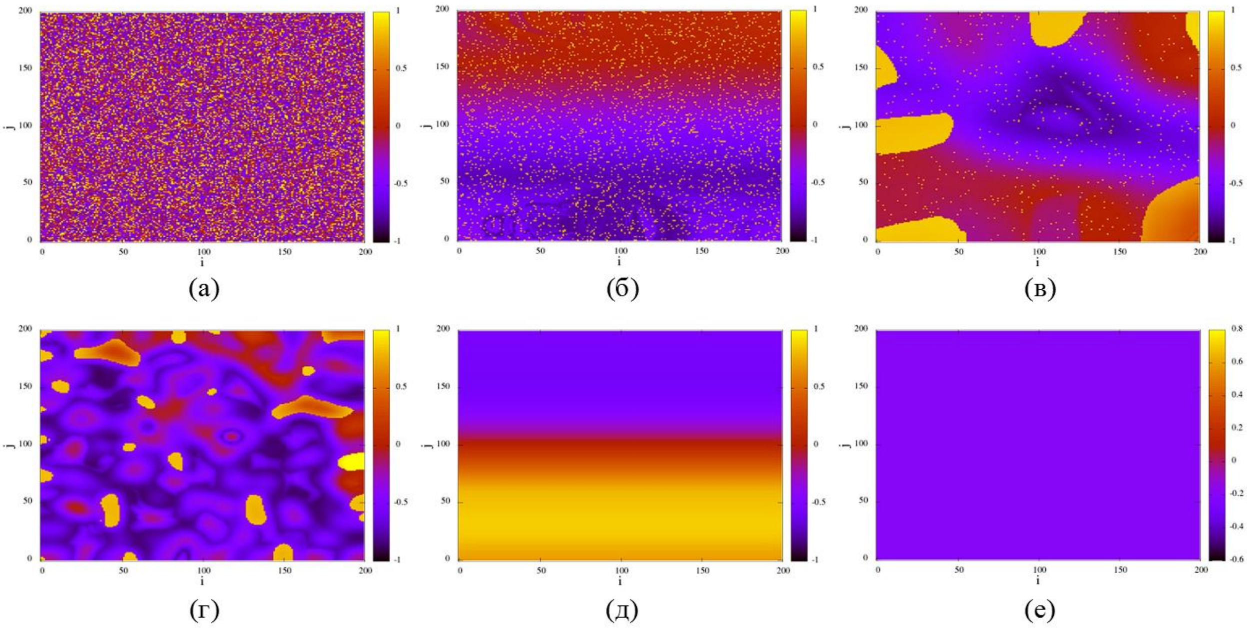


Рисунок 1 - Карта режимов решетки нелокально связанных отображений Эно-Лози (8) при $\varepsilon = 0.200$, $а = 1.7$ и $\beta = 0.5$ на плоскости параметров связи «радиус связи R – сила связи σ».

Как видно из рисунка 1, при данных параметрах в исследуемой системе существует шесть режимов: некогерентность, уединенные состояния, химерные состояния, профили с разрывом, когерентность и полная синхронизация. Пример каждого режима продемонстрирован на рисунке 2. Данные режимы плавно сменяют друг друга при фиксированном значении радиуса связи и изменении силы связи между элементами. Отметим, что при $\sigma < 0.5$ изменении радиуса связи почти не влияет на динамику системы и она в первую очередь определяется силой связи между элементами. Только при большей силе связи увеличение радиуса связи ведет к переходу системы из когерентного режима в режим полной синхронизации, которые будут проиллюстрированы ниже.



(а) (б) (в)

(г) (д) (е)

Рисунок 2 - Мгновенное пространственное распределения динамической переменной x при параметрах $= 0.200$, $a = 1.7$ и $\beta = 0.5$: (а) некогерентность при $\sigma = 0.06, R = 6$, (б) уединенное состояние при $\sigma = 0.22, R = 61$, (в) химерное состояние при $\sigma = 0.28, R = 26$, (г) профиль с разрывом $\sigma = 0.32, R = 6$, (д) когерентность при $\sigma = 0.22, R = 61$, (е) полная синхронизация при $\sigma = 1.00, R = 66$.

Самый большой интерес представляют химерные и уединенные состояния. Уединенные состояние (рисунок 2(б)) характеризуются тем, что динамические переменные x соседних элементов становятся равными почти на всем пространстве решетки, однако, при этом возникают уединенные выбросы одинаковой амплитуды, распределенные равномерно по всей решетке. Химерные состояния (рисунок 2(в)), а точнее химер уединенные состояния, можно описать, как сосуществование кластеров и уединенных узлов. В данной работе особое внимание уделялось зависимости общей области химерных и уединенных состояний от значений управляющих параметров.

Так же наши исследования показали, что для уединенных состояний, химер уединенных состояний, профилей с разрывом, когерентных режимов, а также в некоторых случаях для некогерентных режимов характерно наличие волнового процесса, а точнее бегущей волны. Рисунок 3 демонстрирует пространственно-временные изменения, при которых возмущения в распределении динамической переменной x распространяются по ансамблю, сохраняя свою форму и энергию в течение некоторого времени.

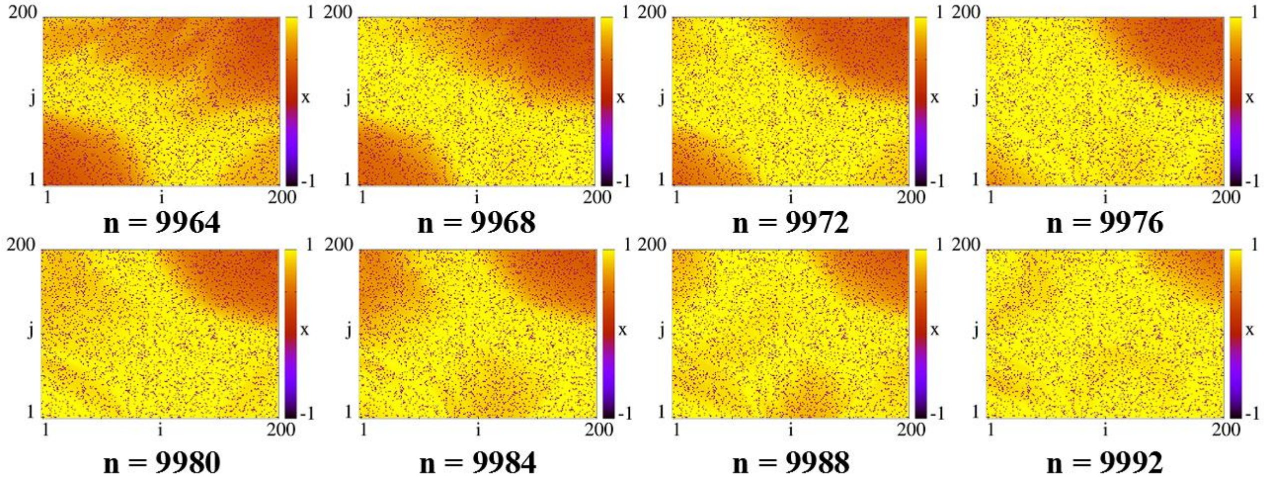


Рисунок 3 - Волновой процесс на когерентном пьедестале уединенного состояния при $\sigma = 0.22, R = 56$, n-номер итерации. Остальные параметры: $\varepsilon = 0.200$, $\mathrm{a} = 1.7$ и $\beta = 0.5$.

В данном выпускной квалификационной работы были представлены карты режимов при различных управляющих параметрах ($\varepsilon = 0.001$ и $\mathrm{a} = 1.6, \varepsilon = 0.1$ и $\mathrm{a} = 1.6, \varepsilon = 0.1$ и $\mathrm{a} = 1.65$, $\varepsilon = 0.2$ и $\mathrm{a} = 1.7$, $\varepsilon = 0.4$ и $\mathrm{a} = 1.96$, $\varepsilon = 0.4$ и $\mathrm{a} = 2.09$), анализ которых позволил выявить определенные закономерности. Наибольшая общая область для уединенных и химерных состояний наблюдается при минимальном значении ε. При увеличении параметра до $\varepsilon = 0.1$ отмечается сокращение ширины общей области химерных и уединенных состояний, но тут стоит обратить внимание на то, как a влияет на пропорциональное соотношение химерных состояний и уединенным состояниям. Если зафиксировать параметр $\varepsilon = 0.1$, то при значении $a = 1.6$ видно явное преобладание области уединенных состояний над областью химерных состояний, если увеличить значение до $a = 1.65$, то уже преобладают химерные состоянии, но при этом в области некогерентности были выявлены режимы, которые близки к уединенным состояниям. Данные факты могут свидетельствовать о том, что в интервале $a = [1.6; 1.65]$ существует значение параметра a, при котором достигается равное соотношение химерных и уединенных состояний. Кроме того, при фиксированном значении $\varepsilon = 0.1$ и уменьшении a=1.65 до a=1.6 в области малых значений радиуса (0<R<60) значительно сокращается область, соответствующая режимам профилей с разрывом. При дальнейшем увеличении параметра перехода отображения Эно-Лози до $\varepsilon = 0.2$ наблюдается тенденция к уменьшению общей области химерных и уединенных состояний. При повышении значения до $\varepsilon = 0.4$ наблюдается, что область химерных состояний и уединенных состояний практически исчезает. Стоит отметить, что при параметрах $\varepsilon = 0.4$ и a=1.96 не было выявлено химерных состояний и уединенных состояний, а при $\varepsilon = 0.4$ и $a = 2.09$ были выявлены несколько химерных отображений. Это показывает зависимость динамики системы от параметра a.

Также было проведено исследования влияния начальных условий на динамику системы. Показано, что для всех значений исследуемых управляющих параметров в системе существует мультистабильность на границах областей с разной динамикой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе подготовки и выполнения данной выпускной квалификационной работы был подготовлен литературный обзор по динамики ансамблей нелокально связанных нелинейных осцилляторов и впервые проведено численное моделирование динамики решетки нелокально связанных отображений Эно-Лози. Данное отображение является комбинацией классических отображений Эно и Лози, которые относятся к разным типам нелинейных систем. Отображение Эно демонстрирует установление негиперболического хаотического аттрактора, а отображение Лози – почти гиперболического хаотического аттрактора. В связи с этим в одномерном ансамбле отображений Эно переход от некогерентной к когерентной динамики наблюдается через химерные состояния, а в ансамбле отображение Лози – через уединенные состояния. С другой стороны, в одномерном ансамбле нелокально связанных отображений Эно-Лози наблюдаются оба этих сценария.

Целью практической части данной выпускной квалификационной работы являлось изучение динамики решетки нелокально связанных отображений Эно-Лози. Выбор данной модели обусловлен ее приближенностью для описания широкого класса реальных физических систем. В ходе проделанной работы были выявлены 6 основных динамических режимов, которые могут устанавливаться в решетке нелокально связанных отображений Эно-Лози при вариации управляющих параметров как самих элементов, так и связи: некогерентность, уединенные состояния, химерные состояния, профили с разрывом, когерентность и полная синхронизация. Каждый найденный режим детально рассмотрен и проиллюстрирован в представленной работе. Также были построены карты режимов при вариации управляющих параметров отображения Эно-Лози.

Анализируя полученные карты режимов при различных управляющих параметрах, можно сделать следующие выводы. Самая большая общая область химерных состояний и уединенных состояний наблюдалась при самом маленьком значении параметра перехода ε. При этом наблюдается тенденция уменьшения области установления химерных состояний и уединенных состояний при увеличении значения параметра перехода ε. Также в ходе исследования была выявлено изменении соотношения между химерными состояниями и уединенными состояниями при изменении параметра a и фиксированном ε. Так, например, при значении параметра $a = 1.6$ преобладают уединенные состояния, а в случае $a = 1.65$ преобладают химерные состояния. Зависимость от параметра a выявлена и для профилей с разрывом, она проявляется в изменении площади существования данного режима. При фиксированном параметре ε = 0.1 и уменьшении a от 1.65 до значения $a = 1.6$ видно сильное уменьшение области режима в области малых значений радиуса R.

При значениях $\varepsilon = 0.4$ и а = 1.96 в системе не установились химерные и уединенные состояния несмотря на то, что парциальные элементы находились в хаотическом режиме в отсутствии связи между ними. Однако, при увеличении параметра «а» до значения 2.09 химерные и уединенные состояния появились в решетке при нескольких значениях параметров связи.

Для всех режимов обнаружены характерные волновые процессы, под которыми понимаются пространственно-временные изменения, при которых возмущения в распределении динамической переменной x распространяются по ансамблю с сохранением формы в течение конечного времени.

Результаты работы были представлены на XXXI Всероссийской научной конференции "Нелинейные дни в Саратове" и опубликованы в сборнике материалов конференции:

Захаров С. П., Рыбалова Е. В., Стрелков Г. И. Динамика решетки нелокально связанных отображений Эно-Лози: от некогерентности к полной синхронизации / С. П. Захаров, Е. В. Рыбалова, Г. И. Стрелков // Нелинейные дни в Саратове: материалы XXXI Всероссийской научной конференции (Саратов, 2025 г.). — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2025. — С. 33–34.