

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Балашовский институт (филиал)

Кафедра математики, информатики, физики

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В  
СТРУКТУРЕ ЕГЭ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 5 курса 152 группы  
направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя  
профилями подготовки)»,  
профили «Математика и физика»,  
факультета математики и естественных наук  
Алешиной Виктории Игоревны

Научный руководитель  
доцент кафедры математики, информатики, физики  
кандидат физико-математических наук  
доцент  30.05.2025 г. Е.Д. Насонова  
(подпись, дата)

Зав. кафедрой математики, информатики, физики  
кандидат педагогических наук,  
доцент  30.05.2025 г. Е.В. Сухорукова  
(подпись, дата)

Балашов 2025

**Введение.** Одним из ключевых понятий в курсе математики является уравнение, знакомство с которым ученики начинают ещё в начальной школе. Умение составлять и решать уравнения различной сложности помогает обучающимся справляться с решением алгебраических, геометрических, текстовых и иных задач.

В процессе изучения предмета уравнения меняют свой характер: становятся сложнее, имеют несколько способов решения, охватывают разные разделы математики.

В курсе алгебры и начал математического анализа обучающиеся знакомятся с новыми видами уравнений: показательными и логарифмическими, которые выносятся на ЕГЭ по профильной и базовой математике. Именно поэтому важно уделять им особое внимание, чтобы облегчить обучающимся понимание материала.

Разработкой методик изучения данных тем занимались И. Е. Малова, Г. К. Остапов, А. Ш. Алимов, А. Г. Мордкович и другие. В своих работах они подробно рассматривали логарифмические и показательные уравнения, составляли систему упражнений, подводящие задачи, а также методику введения тем в курс алгебры старшей школы.

Заданиями по темам «Логарифмические уравнения» и «Показательные уравнения» в ЕГЭ занимались многие методисты и математики: Ю.В. Садовничий, С.И. Колесникова и другие.

Таким образом, постоянное совершенствование методики изучения показательных и логарифмических уравнений является актуальной задачей, поскольку эти метаматематические темы находят применение в различных сферах жизни, разных учебных предметах и т.д. К тому же эти типы уравнений проверяют не только знание алгебраических методов, но и умение применять логарифмические и степенные свойства, а также логически рассуждать при решении задач повышенной сложности. Бакалаврская работа

была представлена на ежегодной научно-практической конференции преподавателей и студентов БИ СГУ «Актуальные проблемы науки и образования» 8 апреля 2025, тема доклада: «Показательные и логарифмические уравнения в структуре ЕГЭ».

**Объект исследования:** методика обучения математике.

**Предмет исследования:** методика изучения показательных и логарифмических уравнений при подготовке к ЕГЭ.

**Цель работы:** разработать методические рекомендации для изучения показательных и логарифмических уравнений при подготовке к ЕГЭ.

**Задачи работы:**

1) рассмотреть понятия показательных и логарифмических уравнений и методы их решения;

2) выявить требования к образовательным результатам при изучении показательных и логарифмических уравнений;

3) изучить содержание и провести анализ материала по показательным и логарифмическим уравнениям в учебно-методических комплексах различных авторов;

4) рассмотреть особенности методики изучения показательных и логарифмических уравнений;

5) разработать комплект заданий по темам «Показательные уравнения» и «Логарифмические уравнения»;

6) провести анализ заданий ЕГЭ по темам «Показательные уравнения» и «Логарифмические уравнения»;

7) разработать интерактивный курс для подготовки к ЕГЭ.

**Методы исследования:** анализ и синтез научной литературы, поиск информации в электронных ресурсах, классификация уравнений и методов их решения, обобщение типовых ошибок обучающихся при решении уравнений.

**Практическая значимость работы** заключается в том, что теория и предложенный комплект заданий разработан для использования на уроках алгебры и начал анализа и для подготовки к ЕГЭ по профильной и базовой математике.

Бакалаврская работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников и шести приложений.

### **Основное содержание работы.**

Первая глава работы «Показательные и логарифмические уравнения в школьном курсе алгебры и начал математического анализа» посвящена изучению показательных и логарифмических уравнений и методов их решения. В параграфе «Понятие показательных уравнений и методы их решения» представлено следующее:

Определение 1. Показательное уравнение – это уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится в показателе степени.

$$a^x = b.$$

Существуют следующие типы показательных уравнений и методы решения к ним:

- 1) простейшие уравнения – метод уравнивания показателей и функционально-графический метод;
- 2) уравнения, приводимые к квадратным – метод замены переменной;
- 3) однородные уравнения – метод почленного деления;
- 4) уравнения с вынесением общей степени – метод группировки или метод разложения на множители.

В параграфе «Понятие логарифмических уравнений и методы их решения» рассматривается:

Определение 2. Логарифмическое уравнение – это уравнение, в котором неизвестная величина находится под знаком логарифма.

Решая логарифмические уравнения, нужно следовать следующему алгоритму:

- 1) найти ОДЗ уравнения;
- 2) упростить выражение слева и справа от знака равенства, используя свойства логарифмов;
- 3) если основания логарифмов одинаковые – избавиться от них. Иначе привести логарифмы к одинаковому основанию, а потом совершить это действие;
- 4) решить уравнение;
- 5) отобрать корни в соответствии с ОДЗ;
- 6) записать ответ.

Логарифмические уравнения подразделяются на типы и имеют свои методы решения. Рассмотрим некоторые из них:

- 1) простейшие логарифмические уравнения – решение по определению логарифма и функционально-графический метод;
- 2) простейшие логарифмические уравнения с одинаковыми основаниями – метод потенцирования;
- 3) уравнения, приводимые к квадратным – метод введения новой переменной;
- 4) логарифмические уравнения с разным основанием логарифмов – метод приведения к одному основанию;
- 5) показательно-логарифмические уравнения – метод логарифмирования.

В результате освоения тем, обучающиеся должны уметь применять свойства степеней, логарифмов, решать стандартные и смешанные уравнения.

В параграфе «Содержание и анализ материала по показательным и логарифмическим уравнениям в учебно-методических комплексах различных

авторов» был проведен анализ УМК Ш.А. Алимова «Математика. Алгебра и начала математического анализа», А.Г. Мерзляка «Математика. Алгебра и начала математического анализа» и А.Г. Мордковича «Математика: алгебра и начала математического анализа».

Проведенный анализ показал, что темы «Показательные уравнения» и «Логарифмические уравнения» вводятся с помощью определений, теорем и следствий, необходимых для решения. Методы решения уравнений представлены авторами на конкретных примерах.

Во второй главе работы «Содержательно-методическое обеспечение изучения показательных и логарифмических уравнений в курсе алгебры и начал анализа средней школы» представлены особенности методики изучения показательных и логарифмических уравнений. Предложен вариант подводящих задач – решение простейших уравнений функционально-графическим методом.

В параграфе «Особенности методики изучения показательных и логарифмических уравнений» разработана последовательность изучения методов решения показательных и логарифмических уравнений, а также представлена их схематичная запись.

Для показательных уравнений:

1) Метод уравнивания показателей (простейшие показательные уравнения и сводящиеся к простейшим:  $a^x = a^b$ ;  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ );

2) Метод разложения на множители (показательные уравнения, допускающие вынесение общей степени и разложение на множители);

3) Метод введения новой переменной (уравнения, сводящиеся к квадратным:  $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$ );

4) Метод почленного деления (однородные показательные уравнения первой и второй степени:  $Aa^x + Cb^x = 0$ ;  $Aa^{2x} + Ba^x b^x + Cb^{2x} = 0$ );

5) Метод группировки (показательные уравнения, сводящиеся к однородным или допускающие разложение на множители);

6) Функционально-графический метод (показательные уравнения смешанного типа:  $a^{g(x)} = f(x)$ ).

Для логарифмических уравнений:

1) Метод решения по определению логарифма (простейшие логарифмические уравнения вида:  $\log_a x = b$ );

2) Метод потенцирования (простейшие логарифмические уравнения вида:  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ );

3) Метод введения новой переменной (логарифмические уравнения, сводящиеся к квадратным:  $\log_a^2 f(x) + \log_a f(x) + C = 0$ );

4) Метод перехода к новому основанию (логарифмические уравнения, содержащие логарифмы с разными основаниями, включая уравнения с переменной в основании логарифма);

5) Метод логарифмирования (логарифмические уравнения, содержащие логарифм в показателе степени с переменным основанием);

6) Функционально-графический метод (логарифмические уравнения смешанного типа:  $\log_a f(x) = g(x)$ ).

Представлены основные ошибки, которые допускают обучающиеся в ходе решения показательных уравнений: нарушение равносильности преобразований; неверное прочтение натуральной степени.

При решении логарифмических уравнений могут быть следующие ошибки: нарушение равносильности преобразований; отсутствие или неверное нахождение ОДЗ; ошибка в применении свойств логарифма.

Для предотвращения ошибок был разработан комплект заданий по темам «Показательные уравнения» и «Логарифмические уравнения» для формирования навыка решения. Представлены карточки с системой оценивания для самостоятельной работы и проверки знаний.

Третья глава работы «Особенности методики изучения показательных и логарифмических уравнений при подготовке к ЕГЭ» рассматривает аспекты методики изучения показательных и логарифмических уравнений при подготовке к ЕГЭ.

В параграфах «Анализ типовых заданий по теме «Показательные уравнения»» и «Анализ типовых заданий по теме «Логарифмические уравнения»» был проведен анализ экзаменационных заданий по математике профильного и базового уровня.

В ЕГЭ по математике базового уровня представлены простейшие показательные и логарифмические уравнения в № 17, который оценивается в 1 первичный балл.

### **Пример 1.**

$$3^{8-x} = 27.$$

Преобразуем уравнение

$$3^{8-x} = 3^3,$$

$$8 - x = 3,$$

$$x = 5.$$

Ответ:  $x = 5$ .

### **Пример 2.**

$$\log_4(x + 3) = \log_4(4x - 15).$$

Логарифмы двух выражений равны, если сами выражения равны и при этом положительны:

$$\begin{cases} x + 3 = 4x - 15, \\ 4x - 15 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ 4x > 15. \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Ответ:  $x = 6$ .

В ЕГЭ по математике профильного уровня показательные и логарифмические уравнения встречаются как в первой, так и второй части экзамена.

Первая часть – № 6, 9. Вторая часть – № 13,18.

Задание № 6 проверяет умение решать простейшие показательные и логарифмические уравнения, которые аналогичны примерам 1-2. Задание оценивается в 1 балл, имеет базовый уровень сложности.

Задание № 9 – задачи с прикладным содержанием.

Обучающимся предлагают текст и задание к нему. Необходимо найти какую-либо физическую величину, решив простейшее показательное или логарифмическое уравнение. Оценивается в 1 балл и имеет повышенный уровень сложности.

### Пример 3.

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон  $pV^k = 10^5$  Па·м<sup>5</sup>, где  $p$  – давление газа в паскалях,  $V$  – объем газа в кубических метрах,  $k = \frac{5}{3}$ . Найдите, какой объем  $V$  (в куб. м) будет занимать газ при давлении  $p$ , равном  $3,2 \cdot 10^6$  Па.

### Решение

Поскольку произведение давления на степень объема постоянно, а давление равно  $3,2 \cdot 10^6$  Па, при заданных значениях параметров  $k = \frac{5}{3}$  и  $const = 10^5$  Па·м<sup>5</sup> имеем равенство:

$$3,2 \cdot 10^6 V^{\frac{5}{3}} = 10^5,$$

$$V^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{32},$$

$$V = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{3}{5}},$$

$$V = \frac{1}{8}.$$

Ответ: 0,125 м<sup>3</sup>.

### Пример 4.

Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени  $\nu = 3$  моль воздуха объемом  $V_1 = 8$  л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема  $V_2$ . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением  $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$  (Дж), где  $\alpha = 5,75$  – постоянная, а  $T = 300$  К – температура воздуха. Какой объем  $V_2$  (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?

### Решение

Задача сводится к решению уравнения  $\alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2} = 10350$ .

$$5,75 \cdot 3 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{8}{V_2} = 10350,$$

$$\log_2 \frac{8}{V_2} = 2,$$

$$\frac{8}{V_2} = 4,$$

$$V_2 = 2.$$

Ответ: 2 л.

Во второй части ЕГЭ по профильной математике показательные и логарифмические уравнения разных типов встречаются в задании № 13. Оно оценивается в два первичных балла и имеет повышенный уровень сложности.

### Пример 5.

$$7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0.$$

Преобразуем уравнение

$$7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 12 \cdot 4^{x^2-3x+1} = 0,$$

$$7 \left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+1} + 5 \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} - 12 = 0,$$

$$7 \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{x^2-3x+1} \right)^2 + 5 \left( \frac{3}{2} \right)^{x^2-3x+1} - 12 = 0,$$

$$\begin{cases} \left( \frac{3}{2} \right)^{x^2-3x+1} = 1, \\ \left( \frac{3}{2} \right)^{x^2-3x+1} = -\frac{12}{7}. \end{cases}$$

У второго уравнения решений нет.

Преобразуем первое уравнение:  $x^2 - 3x + 1 = 0$ , откуда  $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Ответ:  $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

**Пример 6.**

$$1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}.$$

Заметим, что уравнение определено при любом  $x$ . Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_2(9x^2 + 5) = \log_2(8x^4 + 14) - \log_2 2,$$

$$\log_2(9x^2 + 5) = \log_2(4x^4 + 7),$$

$$9x^2 + 5 = 4x^4 + 7,$$

$$4x^4 - 9x^2 + 2 = 0,$$

$$(4x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0.$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 1 = 0, \\ x^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{2}, \\ x = \pm \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ:  $\pm \frac{1}{2}, \pm \sqrt{2}$ .

В задании № 18 для решения уравнений с параметром также необходимо умение решать показательные и логарифмические уравнения различными методами. Оценивается в четыре первичных балла, имеет

высокий уровень сложности. Требует глубокого понимания темы, а также умения работать с графиками функции.

Для формирования навыка решения уравнений в параграфе «Разработка интерактивного курса для подготовки к ЕГЭ» был создан интерактивный тренажер «Логарифмические и показательные уравнения (ЕГЭ)» на платформе stepik. В нем собраны типовые уравнения, которые могут встретиться на настоящем экзамене.

Курс состоит из 10 уроков и 56 тестов. В первом модуле рассматриваются показательные уравнения, во втором логарифмические.

Предложен краткий теоретический материал, приведены примеры методов решения на конкретных задачах. Разработан тренировочный материал для каждого задания ЕГЭ, где встречаются показательные и логарифмические уравнения.

Пройдя курс, учащиеся отработают умение решать уравнений. Познакомятся с основными методами решения, вспомнят теорию, получат навык работы с разным типом задач.

### **Заключение.**

Темы «Показательные уравнения» и «Логарифмические уравнения» изучаются в курсе алгебры и начал математического анализа старшей школы. Они представлены в экзаменационных вариантах ЕГЭ по математике базового и профильного уровня.

В работе были рассмотрены понятия показательных и логарифмических уравнений. Выявлено, что они подразделяются на типы и имеют свои методы решения.

Изучены образовательные требования, выполнение которых определяет успешность освоения материала.

При анализе УМК было выяснено, что в учебниках приведены не все типы показательных и логарифмических уравнений. В основном изучение

тем начинается с определений, теорем или свойств, необходимых для решения. Далее следуют примеры уравнений с использованием различных методов решения.

В работе разработан методический подход к изучению показательных и логарифмических уравнений. Рассмотрены подводящие задачи, выделены темы для пропедевтического курса. Представлены основные ошибки решения показательных и логарифмических уравнений, с описанием методических приемов для предотвращения подобных ошибок. Приведен комплект заданий для изучения уравнений базового, среднего и высокого уровня сложности.

Разработаны карточки с показательными и логарифмическими уравнениями, которую можно применять для тематического контроля знаний обучающихся.

Создан интерактивный курс для отработки навыка решения показательных и логарифмических уравнений на платформе Stepik. Материалы бакалаврской работы могут быть использованы на уроках алгебры и начал анализа и для подготовки к ЕГЭ по профильной и базовой математике.

30.05.2025  
В.И.  
Алашина В.И.