

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

Особенности обобщенной хаотической синхронизации в двумерных
динамических системах с дискретным временем

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

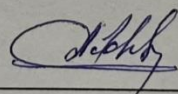
Студента 4 курса 4011 группы

направления 03.03.01 «Прикладные математика и физика»

института физики

Губенко Павла Петровича

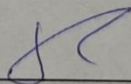
Научный руководитель
зав. каф. ФОС, д.ф.-м.н
должность, уч. степень, уч. звание



дата, подпись

А.А. Короновский
инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
к.ф.-м.н., доцент
должность, уч. степень, уч. звание



дата, подпись

Е.Н. Бегинин
инициалы, фамилия

Саратов 2025 год

Введение

Феномен синхронизации хаотических систем представляет значительный научный интерес в контексте изучения сложных динамических процессов, наблюдаемых в физических, биологических и технических системах[1]. Особое место в современных исследованиях занимает обобщенная хаотическая синхронизация, характеризующаяся установлением функциональной зависимости между состояниями взаимодействующих систем без требования их полного совпадения[2–6].

Актуальность работы заключается в исследовании специфических особенностей обобщенной хаотической синхронизации между системами с дискретным временем, обладающих двулистной структурой хаотического аттрактора, а также в применении модифицированных методов диагностики обобщенной синхронизации.

В рамках данной выпускной квалификационной работы проводится анализ особенностей обобщенной хаотической синхронизации между двумя двумерными дискретными системами, имеющими однонаправленную диссипативную связь. Системы описываются нелинейными отображениями с хаотическими аттракторами, обладающими двулистной структурой. В качестве конкретной системы выбрано модифицированное отображение Гукнехеймера-Холмса[7]. Основное внимание в работе уделяется изучению перехода от асинхронного режима к режиму обобщенной хаотической синхронизации при варьировании параметра связи между системами.

Ключевые цели работы включают реализацию алгоритмов для диагностики режима обобщенной хаотической синхронизации с применением метода вспомогательной системы[8] и расчета спектра показателей Ляпунова для определения границы обобщенной хаотической синхронизации, а также определение типа перемежаемости около границы обобщенной хаотической синхронизации. Кроме того, часть исследования посвящена анализу влияния параметрической расстройки на детектируемые характеристики режима

обобщенной синхронизации, что позволит установить устойчивость диагностирования синхронизации к параметрическим возмущениям.

Все эксперименты в выпускной квалификационной работе проводились с помощью численного моделирования. Для каждого описываемого метода и алгоритма в работе были самостоятельно разработаны программы с использованием языка программирования C++. Визуализация выполнялись с помощью библиотеки Matplotlib для языка программирования Python.

Содержание работы

В **первой главе** представлен теоретический анализ хаотической динамики двумерной дискретной системы на примере модифицированного отображения Гукенхеймера-Холмса. Исследуемая система описывается парой связанных разностных уравнений с управляющими параметрами a и b . Несмотря на математическую простоту, данное отображение демонстрирует нетривиальные свойства, что делает его перспективным для изучения обобщенной хаотической синхронизации.

Ключевой особенностью системы является инвариантность относительно преобразования координат, приводящая к формированию хаотического аттрактора с двулистной структурой. Этот феномен детально исследуется через анализ фазовых траекторий, где важную роль играет распределение времени пребывания траектории на верхнем и нижнем "лепестках" аттрактора. Для количественной оценки симметрии структуры вводится нормированная разность суммарных интервалов пребывания, что позволяет идентифицировать параметрические области, в которых аттрактор сохраняет двулистность.

Особое внимание уделяется методам количественной характеристики хаотических режимов. Центральное место занимает расчет спектра показателей Ляпунова, выполняемый с использованием модифицированного алгоритма Бенеттина. Данный подход, включающий процедуру ортогонализации по Граму-Шмидту, обеспечивает надежное вычисление показателей для многомерных

систем. Дополнительно рассматривается построение карт показателей Ляпунова, визуализирующих зависимость динамических режимов от начальных условий. Эти инструменты позволяют провести комплексный анализ параметрического пространства системы, что является необходимым этапом для последующего исследования синхронизационных явлений.

Во **второй главе** проведен анализ хаотической динамики исследуемой системы с использованием карт показателей Ляпунова. Построение таких карт позволило визуализировать распределение динамических режимов в зависимости от начальных условий и управляющих параметров. Установлено, что фазовое пространство системы содержит области как хаотического, так и периодического поведения, а также зоны, где траектории уходят в бесконечность.

Внимание уделено структуре границы между областями финитной и инфинитной динамики. Увеличение масштаба демонстрирует ее самоподобие, что свидетельствует о возможной фрактальной природе.

Ключевой задачей главы стало определение параметрических условий, при которых в системе устойчиво существует хаотический режим, необходимый для изучения обобщенной хаотической синхронизации. Для этого введена и рассчитана усредненная величина старшего показателя Ляпунова по рабочей области начальных условий. Анализ зависимости этой величины от параметра a выявил интервалы, где динамика системы соответствует хаотическому режиму, а также области периодичности и переходные зоны.

Учет ранее установленного критерия двулистности аттрактора (из **раздела 1.2**) позволил выбрать оптимальные значения параметра $a = 1.755$ и $a = 1.815$, при которых система демонстрирует устойчивый хаос с симметричной двулистной структурой. Эти значения используются в дальнейшем для моделирования ведущей и ведомой систем в рамках исследования синхронизации, что обеспечивает корректность последующих численных экспериментов.

В третьей главе представлен теоретический фундамент для исследования явления обобщенной хаотической синхронизации в дискретных динамических системах. Основное внимание уделено методологическим аспектам изучения этого феномена применительно к системе связанных модифицированных отображений Гукенхеймера-Холмса. Глава содержит подробное описание двух ключевых методов анализа обобщенной синхронизации.

Метод вспомогательной системы - рассматривается процедура создания трех экземпляров системы (ведущей, ведомой и вспомогательной) с различными начальными условиями. Особое внимание уделено алгоритму вычисления и интерпретации расстояния $D(\varepsilon)$ между ведомой и вспомогательной системами, которое служит индикатором синхронизации. Подробно обсуждаются требования к выбору начальных условий и необходимость введения малой параметрической расстройки для избежания численных ошибок.

Анализ спектра показателей Ляпунова - представлена методика разделения полного спектра на показатели ведущей системы и условные показатели ведомой системы. Описан критерий возникновения обобщенной синхронизации, основанный на смене знака старшего условного показателя Ляпунова.

Рассмотрено понятие границы обобщенной синхронизации ε_{GS} , определены два эквивалентных подхода к ее нахождению: через анализ зависимости $D(\varepsilon)$ и через определение точки изменения знака условного показателя Ляпунова.

Отдельный раздел посвящен теоретическому описанию явления перемежаемости вблизи границы синхронизации. Приведена классификация типов перемежаемости и их проявлений в контексте обобщенной хаотической синхронизации.

Глава также содержит описание того, как проводится введение однонаправленной диссипативной связи по различным переменным.

В четвертой главе представлены результаты диагностики обобщенной хаотической синхронизации в системе связанных модифицированных

отображений Гукенхеймера-Холмса. Экспериментальная часть работы основана на сопоставлении данных, полученных методом вспомогательной системы и через анализ спектра показателей Ляпунова, что обеспечило взаимную верификацию результатов.

При исследовании связи по первой переменной было обнаружено аномальное расщепление зависимости $D(\varepsilon)$, обусловленное двулистной структурой хаотического аттрактора. Разработанная модификация расчетной формулы $D'(\varepsilon)$ с учетом свойства четности системы позволила устранить данную аномалию и получить согласованные результаты. Определены значения границы обобщенной синхронизации: $\varepsilon_{GS} = 0.65$ по методу вспомогательной системы и $\varepsilon_{GS} = 0.655$ по спектру показателей Ляпунова. Описывается обнаруженная бифуркация при $\varepsilon_k = 0.9817$, сопровождающаяся качественным изменением динамики системы и редукцией фазового пространства. Для связи по второй переменной удалось с помощью обычной зависимости $D(\varepsilon)$ определить границу $\varepsilon_{GS} = 0.33$ и с помощью спектра показателей Ляпунова $\varepsilon_{GS} = 0.34$. Результаты также хорошо согласуются. Обнаружена рассинхронизация при $\varepsilon_k = 0.994$ и $\varepsilon \rightarrow 1$ для связи по второй переменной.

Введение малой параметрической расстройки между ведомой и вспомогательной системами продемонстрировало принципиально различное поведение для разных типов связи. Для связи по первой переменной наблюдалось значительное смещение границы синхронизации $\varepsilon_{GS} = 0.9$. Напротив, система со связью по второй переменной проявила существенно большую устойчивость, сохранив значение границы синхронизации $\varepsilon_{GS} = 0.35$ даже при наличии параметрической расстройки, а также позволило исключить несогласованность со спектром показателей Ляпунова.

В пятой главе представлены результаты исследования феномена перемежаемости вблизи границы обобщенной хаотической синхронизации. Основное внимание уделено статистическому анализу распределения

длительностей ламинарных фаз для различных типов связи между подсистемами.

При исследовании связи по первой переменной вблизи границы синхронизации $\varepsilon = 0.645$ (при $\varepsilon_{GS} = 0.65$) было выявлено характерное степенное распределение длительностей ламинарных фаз с показателем $\gamma = 3/2$, что соответствует классическому сценарию перемежаемости типа on-off. Аналогичное поведение наблюдалось и для связи по второй переменной при $\varepsilon = 0.325$ (при $\varepsilon_{GS} = 0.33$), причем в последнем случае степенная зависимость проявлялась более четко благодаря большей близости к критическому значению параметра связи.

Особый интерес представляют результаты, полученные при введении малой параметрической расстройки. Для связи по первой переменной $\varepsilon = 0.87$ (при $\varepsilon_{GS} = 0.9$) распределение длительностей ламинарных фаз приобрело экспоненциальный характер с показателем $\gamma = 0.0000013$, демонстрируя так называемый "экспоненциальный хвост". Аналогичное поведение наблюдалось и для связи по второй переменной с расстройкой $\varepsilon = 0.34$ (при $\varepsilon_{GS} = 0.35$), где показатель экспоненты составил $\gamma = 0.000004$.

Проведенные исследования подтвердили универсальный характер перемежаемости типа on-off вблизи границы обобщенной синхронизации независимо от типа связи между подсистемами.

Заключение

Была подтверждена хаотическая природа выбранной системы при определённых значениях параметров a и b . Построение карт показателей Ляпунова позволило визуализировать области хаотической динамики в плоскости начальных условий и определить для выбранной рабочей области значения параметра a , при которых устанавливается стабильный хаотический режим.

Установлено, что двулистная структура хаотического аттрактора наблюдается не при всех значениях параметра a . Были определены параметры, при которых эта структура проявляется наиболее явно.

Исследованы два метода диагностики обобщенной синхронизации: метод вспомогательной системы и анализ спектра показателей Ляпунова. Оба метода показали согласованные результаты, что подтверждает надежность реализации каждого из них.

Для связи по первой переменной с учетом предложенного модифицированного расчета разницы между состояниями систем удалось исключить аномалию в полученных результатах, получаемых с помощью метода вспомогательной системы, что позволило определить границу обобщенной синхронизации $\varepsilon_{GS} = 0.65$. В случае связи по второй переменной получилось без учета модификации определить границу $\varepsilon_{GS} = 0.33$. Это свидетельствует о том, что выбор переменной для ведения связи существенно влияет на условия синхронизации.

В случае связи по первой переменной обнаружена бифуркация, приводящая к редукции динамики системы и кризису хаотического аттрактора при значении параметра связи $\varepsilon_k = 0.9817$. Это явление отсутствует при связи по второй переменной, что делает последнюю более предпочтительной для практических применений.

Обнаружено, что введение малой расстройки параметра между ведомой и вспомогательной подсистемами позволяет избежать численных ошибок, связанных с ограничением машинной точности при исследовании перемежаемости. А именно, увеличивает количество статистических данных при выделении ламинарных фаз и позволяет фиксировать более длинные фазы.

Учет малой расстройки параметра в методы вспомогательной системы для связи по первой переменной привел к сильному смещению границы обобщенной хаотической синхронизации к значению $\varepsilon_{GS} = 0.9$. В случае связи по второй

переменной учет расстройки помог исключить аномальные результаты, который не согласовался с методом показателей Ляпунова и дал маленькое смещение границы к значению $\varepsilon_{GS} = 0.35$.

Анализ распределения длительностей ламинарных фаз показал, что вблизи границы обобщенной хаотической синхронизации система демонстрирует перемежаемость типа on-off. Распределение подчиняется степенному закону $P \sim \tau^{-3/2}$ для коротких и средних фаз и экспоненциальному закону $P \sim e^{-\nu\tau}$ для длинных фаз. Для связи по второй переменной также определен тип перемежаемости on-off и его свойства проявляются более четко, что указывает на большую стабильность этой конфигурации по сравнению со связью по первой переменной.

Полученные результаты могут быть полезны для понимания принципов диагностики обобщенной хаотической синхронизации между дискретными системами, в частности дискретными система с двулистным хаотическим аттрактором.

В заключение, проведенное исследование вносит вклад в понимание механизмов обобщенной хаотической синхронизации и демонстрирует важность выбора типа связи и параметров системы для достижения устойчивой синхронизации. Результаты работы открывают перспективы для дальнейших исследований, в частности, определение причин возникновения обнаруженной бифуркации и разработку новых методов диагностики синхронизации для дискретных систем с двулистной структурой хаотического аттрактора.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Пиковский А. С., Розенблюм М. Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление / А. С. Пиковский, М. Г. Розенблюм, Ю. Куртс, М.: Техносфера, 2003.
2. Rulkov N. F. [и др.]. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Physical Review E*. 1995. № 2 (51). С. 980–994.
3. Adel Ouannas, Zaid Odibat Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems in discrete time // *Nonlinear Dynamics*. 2015. № 1 (81). С. 765–771.
4. Shu Tang Liu, Guanrong Chen Nonlinear feedback-controlled generalized synchronization of spatial chaos // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2004. № 1 (22). С. 35–46.
5. Xiao-Song Yang, Guanrong Chen Some observer-based criteria for discrete-time generalized chaos synchronization // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2002. № 6 (13). С. 1303–1308.
6. Yan-Wu Wang, Zhi-Hong Guan Generalized synchronization of continuous chaotic system // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2006. № 1 (27). С. 97–101.
7. Прошин Ю. Н., Шакиров М. А. Моделирование и визуализация нелинейных динамических систем. Часть 1. Точечные отображения / Ю. Н. Прошин, М. А. Шакиров, Казань: Казан. ун-т, 2017. 36 с.
8. Abarbanel H. D. I., Rulkov N. F., Sushchik M. M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Physical Review E*. 1996. № 5 (53). С. 4528–4535.