МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Минимальные расширения цветных графов

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы
специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Маскаева Владимира Алексеевича

Научный руководитель
д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов
22.01.2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов
22.01.2024 г.

Саратов 2024

ВВЕДЕНИЕ

Цветные графы являются одним из интересных и актуальных объектов дискретной математики, имеющих множество приложений в различных областях науки и техники. Цветные графы могут использоваться для моделирования разнообразных систем, в которых элементы имеют различные свойства или типы. Например, цветные графы могут представлять собой схемы электрических цепей, сети связи, химические соединения, биологические структуры и т.д.

Одной из важных задач, связанных с цветными графами, является задача поиска неизоморфных цветных графов, то есть таких графов, которые нельзя совместить друг с другом с сохранением цветов вершин. Эта задача имеет практическое значение, так как позволяет оптимизировать процессы синтеза и анализа систем, описываемых цветными графами. Существуют различные алгоритмы и методы для решения этой задачи, основанные на использовании канонических представителей, отсечении изоморфизмов, генерации комбинаторных объектов и т.д [15].

Другой интересной задачей, связанной с цветными графами, является задача построения минимальных расширений цветных графов. Задача построения минимальных расширений цветных графов возникает в контексте исследования отказоустойчивости систем, моделируемых цветными графами [16]. Отказоустойчивость означает способность системы продолжать функционировать при наличии отказов некоторых ее элементов или связей. Исследование отказоустойчивости систем имеет важное прикладное значение, так как оно помогает решать многие актуальные и сложные задачи, связанные с обеспечением непрерывности, доступности, качества и безопасности функционирования различных систем, таких как компьютерные сети, базы данных, облачные хранилища, системы связи, энергоснабжения, транспорта и т.д. Таким образом, исследование отказоустойчивости систем является актуальным, перспективным и востребованным направлением научной и практической деятельности, которое имеет большое значение для развития науки, техники, экономики. Минимальные расширения цветных графов позволяют увеличить отказоустойчивость системы с минимальными затратами на введение избыточных элементов и связей. Существуют аналитические и алгоритмические подходы к решению этой задачи для различных классов цветных графов [15].

Значимый вклад в исследование минимальных расширений графов внесли авторы работ [2-6].

Целью данной работы является построение и исследование минимальных вершинных расширений цветных графов. В данной работе рассматриваются следующие задачи:

- реализация алгоритма построения минимальных вершинных расширений цветных графов;
- разработка программного инструмента с графическим интерфейсом для построения всех неизоморфных минимальных вершинных расширений заданного цветного графа;
- анализ полученных результатов.

Дипломная работа состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка использованных источников и 2 приложений. Общий объем работы – 48 страниц, из них 24 страницы – основное содержание, включая 11 рисунков и 3 таблицы, список использованных источников из 17 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1 данной работы посвящен основным теоретическим сведениям теории графов. В частности, в подразделе 1.1 приведены определения графа и вложения графов, необходимые для рассмотрения темы работы.

Определение 1.1.1. Пара $G = (V, \alpha)$ называется неориентированным графом (везде далее просто графом), где $V = \{1, \dots, n\}$ – множество вершин, а α – симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. Графы, определенные таким образом, не содержащие петель и кратных ребер иногда называют простыми.

Определение 1.1.9. Вложением графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется такое инъективное отображение f: $V_1 \to V_2$, что для любых двух вершин $u, v \in V_1$ выполняется следующее условие: $(u, v) \in \alpha_1 \Rightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2$ При этом говорят, что граф G_2 допускает вложение графа G_1.

Подраздел 1.2 посвящен автоморфизмам и изоморфизмам в теории графов, даны соответствующие определения, а также определения инварианта и полного инварианта графа.

Определение 1.2.1. Два графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называются изоморфными, если можно установить взаимно однозначное соответствие f: $V_1 \to V_2$, сохраняющее отношение смежности между каждой вершиной u, v: $(u, v) \in \alpha_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2$

Изоморфизм двух графов обозначается $G_1 \cong G_2$.

Определение 1.2.2. Изоморфное отображение графа на себя называется автоморфизмом.

Определение 1.2.4. Инвариантом графа G называется набор его характеристик, одинаковый для всех изоморфных ему графов.

Определение 1.2.5. Инвариант, который определяет граф однозначно с точностью до изоморфизма называется полным инвариантом графа.

В подразделе 1.3 рассматриваются цветные графы и их изоморфизм.

Определение 1.3.2. Пусть $G = (V, \alpha)$ – граф, и $i \in \mathbb{N}$. Функция вида $f\colon V \to \{1, \ldots, i\}$ называется вершинной i-раскраской графа G, а $f(v)$, $v \in V$ называется цветом вершины v. При этом граф называется графом с цветными вершинами, или цветным графом. Для таких графов вводится следующее обозначение: $G = (V, \alpha, f)$.

Определение 1.3.3. Изоморфизмом цветных графов $G_1 = (V_1, \alpha_1, f_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2, f_2)$ называется изоморфизм графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$, сохраняющий цвета. Это биекция $\varphi\colon V_1 \to V_2$, при которой выполняются два условия:

1. $\forall\, u, v \in V_1$: $(u, v) \in \alpha_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$;
2. $\forall\, v \in V_1$: $f_1(v) = f_1(\varphi(v))$.

Раздел 2 содержит сведения о минимальных вершинных расширениях цветных графов.

В подразделе 2.1 даны определения вершинного k-расширения и минимального вершинного k-расширения.

Определение 2.1.1. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется вершинным k-расширением графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вкладывается в каждый граф, получающийся удалением любых k вершин из графа G^* со всеми инцидентными им ребрами [11].

Вершины, содержащиеся в графе G^*, но не в G, будем называть дополнительными вершинами, а ребра – дополнительными ребрами.

Определение 2.1.2. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ графа $G = (V, \alpha)$ называют минимальным вершинным k-расширением, если он удовлетворяет следующим условиям:

1. граф G^* является вершинным k-расширением графа G;
2. граф G^* содержит в точности на k вершин больше, чем граф G: $|V^*| = |V| + k$;
3. среди всех графов, удовлетворяющих первым двум условиям, α^* содержит наименьшее количество ребер.

В подразделе 2.2 соответствующие определения распространяются на случай цветных графов.

Определение 2.2.1. Говорят, что цветной граф $G_1 = (V_1, \alpha_1, f_1)$ допускает вложение цветного графа $G_2 = (V_2, \alpha_2, f_2)$, если:

1. существует инъективное отношение ζ: $V_2 \to V_1$, которое позволяет вложить G_2 в граф G_1: $\forall\, u, v \in V$: $(u, v) \in \alpha 1 \Leftrightarrow (\zeta(u), \zeta(v)) \in \alpha_2$;

2. цвет любой вершины $v \in G_2$ сохраняется при вложении: $\forall\, v \in G_2$: $f_1(v) = f_2(\zeta(v))$.

Также часто говорят, что граф G_1 допускает вложение графа G_2 с учетом цветов.

С помощью предложенной операции можно выразить идею оптимальной отказоустойчивой системы с использованием терминов теории графов. Модель отказоустойчивости, которую мы рассматриваем, была предложена Хейзом в работе [16].

Определение 2.2.2. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*, f^*)$ называется вершинным k-расширением цветного графа $G = (V, \alpha, f)$, если граф G можно вложить с учетом цветов в каждый граф, полученный удалением любых k вершин графа $G*$ со всеми инцидентными им ребрами.

Определение 2.2.3. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*, f^*)$ называется минимальным вершинным k-расширением i-цветного графа $G = (V, \alpha, f)$, если выполняются следующие условия:

1. граф G^* является вершинным k-расширением цветного графа G;

2. $V*$ содержит на ik больше вершин, чем V: $|V^*| = |V| + ik$;

3. среди всех графов, удовлетворяющих условиям 1 и 2, α^* имеет наименьшее количество ребер.

Следует отметить, что для достижения отказоустойчивости графа G^* необходимо добавить, как минимум, столько вершин, сколько получится при умножении числа цветов i на коэффициент отказоустойчивости k. Допустим, в графе G множество количества вершин различных цветов обозначается как $V_f = \{|V_0|, |V_1|, \dots, |V_j|, \dots, |V_i|\}$, где $V_j = \{f(v) = j\text{: } \forall\, v \in V\}$ – все вершины цвета j.

Тогда, если в G^* количество дополнительных вершин будет меньше ik хотя бы на единицу, то множество V_f =$\{|V_0| + 1, |V_1| + 1, \dots , |V_{j-1}| + 1, |V_j|, |V_{j+1}| + 1, \dots , |V_i| + 1\}$, а значит при удалении любой вершины цвета j количество вершин этого цвета становится равным $|V_j| - 1$, то есть условие сохранности цветов нарушается, и $G*$ не может являться вершинным расширением цветного графа G.

Стоит заметить, что понятие минимальных расширений цветных графов соответствует термину оптимальной отказоустойчивой реализации, рассматриваемому в рамках теории графов.

Таким образом в разделах 1 и 2 даны все необходимые теоретические сведения, которые были использованы в работе.

Раздел 3 содержит описание программы с графическим интерфейсом на языке Python, которая была реализована в ходе данной работы. Также в этом разделе описан алгоритм, на основе которого работает программа и приведены результаты работы. Данный инструмент удобен для быстрого осмотра расширений интересующих графов и получения данных для дальнейшего анализа.

Программа написана на основе следующего алгоритма.

Алгоритм 3.1. Построение всех неизоморфных вершинных k-расширений для заданного i-цветного графа, отличного от вполне несвязного.

Вход: $G = (V, \alpha, f)$, $k \in \mathbb{N}$.

1. $m := 0$.

2. $m := m + 1$.

3. Строятся все графы, полученные из G путем добавления k вершин для каждого цвета $\{1, \dots , i\}$ и m ребер. Общее число вершин в полученных графах будет равно $|V| + ik$.

4. Из полученных на предыдущем шаге графов выбираются все вершинные k-расширения цветного графа G с учетом цветов.

5. Если на шаге 4 не было найдено ни одного расширения, то производится переход на шаг 2.

6. Из всех найденных графов выбирается по одному представителю от классов изоморфных графов. Полученное множество представителей является множеством попарно-неизоморфных минимальных вершинных k-расширений цветного графа G.

На вход программа принимает список графов в формате graph6 и вектор цветов вершин графа. Цель программы – найти минимальное вершинное 1-расширение для каждого графа из списка. Для решения этой задачи программа использует алгоритм, основанный на переборе возможных вариантов расширения и проверке их на минимальность. Программа выводит на экран рисунки исходного и полученных графов с помощью библиотеки NetworkX [13], которая предоставляет функции для создания и визуализации графов, а также имеет ряд встроенных функций работы с графами. Кроме того, программа использует библиотеку graph-tool [14], которая позволяет эффективно работать с большими графами, а также библиотеку PyQt5, которая обеспечивает графический интерфейс пользователя для программы.

Также в ходе работы реализованный алгоритм был использован для получения минимальных вершинных 1-расширений всех неизоморфных цветных графов с $n \leq 5$, где n – количество вершин графа. На вход алгоритму были поданы файлы, сгенерированные с помощью генераторов *geng* и *vcolg*, входящих в состав программного комплекса *nauty* версии 2_8_6 [12]. Некоторые примеры результатов работы алгоритма представлены в Приложении Б данной работы.

Далее в ходе данной работы был получен набор файлов в следующем формате: имя файла состоит из представления графа в формате graph6 и вектора цветов вершин, файл содержит ссылку на своё изображение и ссылки на свои минимальных вершинных 1-расширений в виде разметки markdown. Такое представление позволило реализовать визуализацию связи различных графов и их расширений. Для этого была использована программа Obsidian, позволяющая строить граф, отражающий связи файлов между собой по ссылкам [17].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы была поставлена и решена задача построения всех неизоморфных минимальных вершинных 1-расширений цветных графов, заданных в формате graph6. Для решения этой задачи была разработана программа с графическим интерфейсом на языке программирования Python, которая реализует алгоритм поиска минимальных вершинных 1-расширений, основанный на переборе возможных вариантов расширения и проверке их на минимальность. Программа позволяет вводить граф в формате graph6, выбирать цвета для вершин, визуализировать исходный и расширенный графы. Программа также позволяет визуально анализировать расширения графов и помогает исследовать отдельные случаи. Программа может быть полезна для изучения свойств графов и их расширений, а также для демонстрации работы алгоритма поиска минимальных вершинных 1-расширений.

Также в работе представлен способ визуализации взаимосвязи различных графов и их расширений, что позволяет легче отыскать интересные для дальнейшего исследования семейства графов, а также в дальнейшем возможно позволит наблюдать закономерности построения расширений в рамках данных семейств.

Решены все поставленные задачи, достигнута цель работы. Результаты работы могут быть использованы для исследования свойств и структуры минимальных вершинных расширений цветных графов.