МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра общей, теоретической и компьютерной физики

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ КАЛАБИ-ЯУ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 4022 группы
направления 03.03.02 «Физика»
Института физики
Новичкова Егора Александровича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ____________________ В. В. Дмитриев
подпись, дата

Заведующий кафедрой
профессор, д.ф.-м.н.
____________________ В. М. Аникин
подпись, дата

Саратов 2023 г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многообразия Калаби-Яу вошли в физику через теорию струн еще в конце 80-х годов. Идея струнных компактификаций состоит в том, чтобы разложить 10-мерное пространство-время M_{10} как $M_{10} = M_4 \times X$, где M_4 – наше 4-мерное пространство-время, а X – компактное, ненаблюдаемое при малых энергиях 6-мерное многообразие. В последнее время наблюдается резкий прогресс в вычислительной мощности и технике, а также развитие нейронных сетей и искусственного интеллекта. Все это позволяет по-новому взглянуть на проблему исследования алгебраических многообразий и получения важной информации об их свойствах.

Целью данной выпускной квалификационной работы является разработка новых методик классификации многообразий Калаби-Яу на основе компьютерного моделирования.

Для достижения этой цели решались следующие **задачи**:

– Изучение основ дифференциальной и алгебраической геометрии.

– Исследование параметров Стандартной модели элементарных частиц и выявление полезных паттернов для классификации пространств Калаби-Яу.

– Нахождение чисел Ходжа для некоторых специальных случаев комплексных проективных многообразий.

– Разработка метода параметризации и окрашивания комплексных многомерных многообразий.

– Анализ и компьютерное моделирование поверхностей Ферма в проективном пространстве.

Предмет исследования. Данная выпускная квалификационная работа посвящена теоретическому исследованию многообразий Калаби-Яу и визуализации поверхностей Ферма.

Структура ВКР. Выпускная квалификационная работа (ВКР) содержит введение, 3 главы, заключение, список использованных источников (38 наименований). Материалы работы изложены на 45 страницах.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводятся аспектные характеристики работы (актуальность, цель и задачи работы, особенность подхода).

В первой, обзорной по характеру главе, приводятся обоснования использования компактных многообразий Калаби-Яу в качестве математического фундамента теории суперструн.

Хорошо известно, что теория струн является единой теорией гравитации и элементарных частиц в высших измерениях. Вскоре после Первой революции 1984 года с отменой аномалий [1] и открытием гетеротической струны [2] родилась тема «струнной феноменологии» [3]. Причина такого интереса заключалась в том, что сразу же появилась свободная от аномалий квантовая теория поля, которая естественным образом содержала гравитон, а также калибровочную группу E_8. Другими словами, она представляла собой единую теорию квантовой гравитации – хотя и в 10 измерениях пространства-времени, которая также через вложение $SU(3)\times SU(2)\times U(1) \subset SU(5) \subset SO(10) \subset E_6 \subset E_8$ могла привести к Стандартной модели.

Основные успехи теории струн можно описать следующим образом:

- Теория струн является единственным известным решением проблемы в основе современной физики – несовместимости теории квантовой поля и общей теории относительности. Сингулярности пространства-времени неизлечимы в любой теории гравитации, основанной на притяжении точечных частиц.
- Она предсказывает наиболее важные физические принципы – общую теорию относительности, калибровочную теорию и суперсимметрию.
- Она реализует очень старую идею о том, что физика должна определяться только математическими принципами, без каких-либо произвольных безразмерных параметров.

Поскольку теория струн является теорией квантовой гравитации, то субъектом ее изучения является квантовая геометрия. Единственная ее известная формулировка – это первично квантованная теория релятивистских струн и, как следствие, теория струн должна обязательно зависеть от фонового пространства.

Что такое квантовая геометрия? Теория струн имеет два параметра: константа связи g_s и натяжение струны $1/\alpha'$, и, следовательно, существует два источника квантовых флуктуаций. Квантовая механика в обычном смысле слова регулируется параметром g_s, который учитывает вклад струнных петель в амплитуды рассеяния – разложение по степеням g_s является разложением по родам римановой поверхности, которая является мировой листом для струны. При заданном роде поверхности теория описывается двумерным конформной теорией поля (CFT) на римановой поверхности, с размерной константой связи α', обратной натяжению струны.

Компактификации теории струн с $g_s = 0$, описываемая CFT с нулевым родом поверхности, дает нам классическую струнную геометрию. Вопрос о том, как меняется геометрия при замене точечных частиц струнам был тщательно изучен в начале 90 -х годов. Опишем ниже некоторые из ключевых результатов. Эффективная константа связи CFT – это α'/R^2 где R – это характерный размер в Калаби-Яу. Корреляционная функция в этой теории будут разложением по степеням α'/R^2, поэтому лидирующий порядок можно получить путем установки $\alpha' = 0$. Это классическая геометрия, поскольку при бесконечном натяжения струна уменьшается до точечной частицы, но классические величины будут по порядку согласованы с порядком струнных флуктуаций. Этот результат кажется довольно тривиальным, но можно показать, что некоторые топологические величины на X не являются инвариантами классической теории струн, но изменяются квантовыми эффектами. Наиболее замечательным результатом является зеркальная симметрия. Зеркальная симметрия – это, по существу, тривиальная симметрия CFT. Ее вклад в геометрию не представляет ничего впечатляющего. В ней говорится, что существуют пара многообразий Калаби-Яу (X, Y) различной топологии – но их классическая геометрия совершенно отличается, но тем не менее дает ту же теорию конформного поля – в струнной геометрии они одинаковы.

Квантовая геометрия возникает, когда константа связи $g_s \neq 0$. Мы изучаем геометрию и физику, которые возникают в точке, где встречается струнная геометрия и квантовая механика. Когда связь небольшая, но ненулевая, разложение по теории возмущений в качестве суммы по поверхностями существует, однако разложение по g_s расходится быстрее, чем в теории поля. В отсутствии микроскопической формулировки теории струн при произвольном значении g_s многие аспекты квантовой геометрии могут быть изучены с использованием эффективных методов теории поля. При таком подходе квантовая геометрия, свойства компактификации многообразия X, определяются изучением лагранжиана с низкой энергией. Лагранжиан описывает физику безмассовых струнных режимов, где башня массивных струнных состояний интегрируется. В нулевом порядке по α', константы связи теории и массы состояний Богомольного–Прасада–Соммерфилда (BPS) [4] определяются классической геометрией X. Скалярные поля в Лагранжиане являются координатами в конфигурационном пространстве возможных вариантов X, а кинетические слагаемые являются метрикой в конфигурационном пространстве. Зависимость α' и g_s от теории струн оказывает влияние на константы связи низкоэнергетической теории и является поправками квантовой гравитации к геометрии X. Теперь известно, что непертурбативная теория струн содержит состояния, которые не появляются в каком-либо порядке теории возмущений, особенно солитоны, называемые Дирихле (D) бранами. С одной стороны, компактификация теории струн на многообразие Калаби-

Яу показывает, что включение этих состояний необходимо для самосогласованности теории струн. С другой стороны, последствия включения этих состояний на классическую и струнную геометрию довольно драматичны: самые основные топологические инварианты многообразий Калаби-Яу не являются инвариантами в квантовой геометрии. На другом уровне физика частиц имеет красивые и плодотворные связи с геометрией – наиболее заметным является отношение теории Янга-Миллса (YM) и общей теории относительности с дифференциальной геометрией.

Во второй главе исследуется проблема струнного ландшафта и воспроизведения параметров Стандартной модели.

Струнная феноменология нацелена на получение комплекта частиц и взаимодействий Стандартной модели в качестве низкоэнергетического предела. С точки зрения представления группы Стандартной модели G_{SM} , обозначаемого как $(\mathbf{a},\mathbf{b})_{(c,d)}$, где **a** – представление SU(3), **b** – представление SU(2), а (c, d) – заряды двух абелевых групп U(1). Элементарные частицы Стандартной модели (все фермионы, кроме скалярного Хиггса) выглядят следующим образом:

$SU(3)\times SU(2)\times U(1)\times U(1)_{B-L}$	Мультиплет	Частица
$(\mathbf{3},\mathbf{2})_{1,1}$	3	левый кварк
$(\mathbf{1},\mathbf{1})_{6,3}$	3	левый анти-лептон
$(\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1})_{-4,-1}$	3	левый анти-верхний
$(\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1})_{2,-1}$	3	левый анти-нижний
$(\mathbf{1},\mathbf{2})_{-3,-3}$	3	левый лептон
$(\mathbf{1},\mathbf{1})_{0,3}$	3	левое антинейтрино
$(\mathbf{1},\mathbf{2})_{3,0}$	1	верхний Хиггс
$(\mathbf{1},\mathbf{2})_{-3,0}$	1	нижний Хиггс

В дополнение к ним существуют векторные бозоны: 1) связанные с группой SU(3), называемые глюонами, которых существует 8 штук, что соответствует размерности SU(3), и 2) связанные с $SU(2)\times U(1)$, называемые $W^{\pm}$, Z бозонами и фотон: всего 4. Суперсимметричное расширение этой модели, называемое МССМ, и для каждого из приведенных выше фермионов существует бозонный партнер и наоборот. В таблице обращает на себя внимание число 3, означающее, что частицы воспроизводят себя в трех семействах, или поколениях, за исключением недавно открытого бозона Хиггса, который является только одним дублетом в SU(2). То, что должно быть 3 и только 3 поколения, с сильно различающимися массами, является экспериментальным фактом с у ровнем достоверности $\sigma = 5{,}3$ и до сих пор не имеет удовлетворительного теоретического объяснения на сегодняшний день. Возможная симметрия между ними, называемая ароматом, не зависит от калибровочной симметрии.

После компактификации гетеротической струны E_8 на тройке Калаби-Яу M_6, достигается низкоэнергетическая суперсимметричная QFT. Таким образом, наша парадигма проста

$$\text{Геометрия } M_6 \longleftrightarrow \text{Физика } \mathbb{R}^{1,3}. \tag{1}$$

Теперь, касательный пучок T_M является голономным SU(3); таким образом, E_8 разбивается на E_6 поскольку SU(3) является коммутантом E_6 внутри E_8. В частности, фундаментальное 248-размерное представление ветвей E_8

$$\begin{gathered} E_8 \ \rightarrow SU(3) \times E_6 \\ 248 \ \rightarrow (1,78) \ \oplus \ (3,27) \ \oplus \ (\bar{3}, \overline{27}) \ \oplus \ (8,1).. \end{gathered} \tag{2}$$

Можно упаковать все частицы Стандартной модели из таблицы выше в 27 представление E_6, в SUSY E_6-GUT теории. Из (2) следует, что это связано с фундаментальной 3 из SU(3). Таким образом, представление 27 связано с $H^1(T_M)$, а сопряженное представление $\overline{27}$ с $H^1(T_M^\vee)$,. Аналогично, представление 1 в E6 связано с 8 из SU(3) и, следовательно, с $H^1(T_M \otimes T_M^\vee)$. Таким образом, поколения частиц $\sim H^1(T_M)$, поколения античастиц $\sim H^1(T_M^\vee)$. В общем, даже если взять произвольный пучок V, а не только T_M:

Частицы в $\mathbb{R}^{1,3} \longleftrightarrow$ *группы когомологий* $V, V^\vee$ *и их внешних/тензорных сил*

Взаимодействия, т.е. кубические связи Юкавы в лагранжиане, образованные этими частицами (фермион-фермион-Хиггс) являются трилинейными отображениями, с когомологическими группами в $\mathbb{C}$; это прекрасно работает для тройки Калаби-Яу. Эта геометрическая «любовь к тройкам», была названа Канделасом и др. триадофилией [5]. Совсем недавно, независимо от теории струн или каких-либо унифицированных теорий, вопрос о том, почему могут существовать геометрические причины для того, чтобы три поколения были встроены в саму геометрию Стандартной модели, были исследован в [6].

В третьей главе с помощью компьютерного моделирования строятся сечения поверхностей Ферма в проективном пространстве $\mathbb{C}P^2$.

Компьютерная графика оказалась очень привлекательным инструментом для исследования низкоразмерных алгебраических многообразий и получения интуиции об их свойствах. В принципе, компьютерное изображение любого многообразия, описываемого алгебраическими уравнениями, может быть получено путем численного решения уравнений для создания фиксированной тесселяции или с помощью эквивалентных методов трассировки лучей. Однако для высокопроизводительного интерактивного манипулирования человеком гораздо проще и практичнее иметь параметрическое представление вместо неявного уравнения, которое должно решаться численно; важной дополнительной особенностью многих параметрических представлений является то, что они передают информацию о симметрии тела, которая может быть использована для дальнейшего улучшения процесса визуализации. Численные решения обычно не подчеркивают естественные структуры многообразий, плохо ведут себя вблизи сингулярностей и самопересечений, и их труднее исследовать с помощью других инструментов визуализации, таких как выбор подмногообразия, координатные преобразования и деформации.

Руководствуясь этой мотивацией, была найдена [7] чрезвычайно полезная конструкция для параметрических моделей больших семейств комплексных кривых, то есть двухмерных многообразий, представляющих решения одиночных уравнений в двух комплексных переменных или, эквивалентно, соответствующих пар уравнений в четырех вещественных переменных. Эта конструкция идеально подходит для интерактивных систем компьютерной графики; кроме того, получаемые визуализации естественным образом проявляют тонкие свойства комплексных кривых. Эта конструкция была впервые описана в [8], где она была применена к задаче создания компьютерной анимации, демонстрирующей свойства однородных уравнений в $\mathbb{C}P^2$, известных как поверхности Ферма.

Множества, определяемые проективным пространством $\mathbb{C}P^N$, подчиняются нетривиальным Ричи-плоским решениям уравнений Эйнштейна

$$(z_0)^{N+1} + (z_1)^{N+1} + \cdots + (z_N)^{N+1} = 0. \qquad (3)$$

Для любого многообразия Калаби-Яу размерности $2(N-1)$ в проективном пространстве $\mathbb{C}P^N$ можно построить двумерное комплексное многообразие – поперечное сечение в $\mathbb{C}P^2$, т.е. в 4D реальном пространстве, полагая все слагаемые в выражении (3) за исключением z_1 и z_2 постоянными. Тогда 2D сечения полного пространства будет описываться

$$(z_1)^{N+1} + (z_2)^{N+1} = 1. \qquad (4)$$

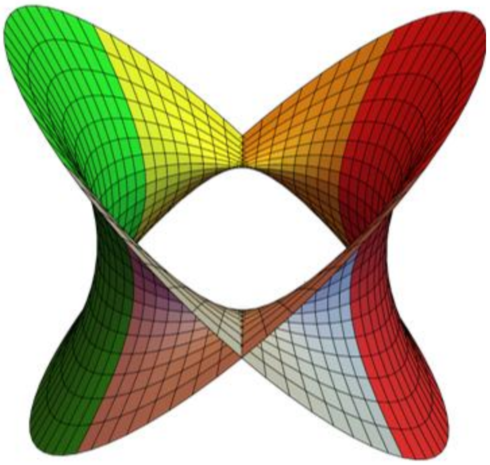

Рисунок – 1. $\mathbb{C}P^2$ сечение многообразия Калаби-Яу для $N = 1$

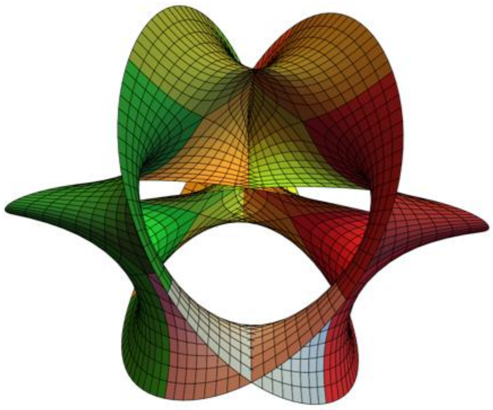

Рис 2. $\mathbb{C}P^2$ сечение многообразия Калаби-Яу для $N = 2$

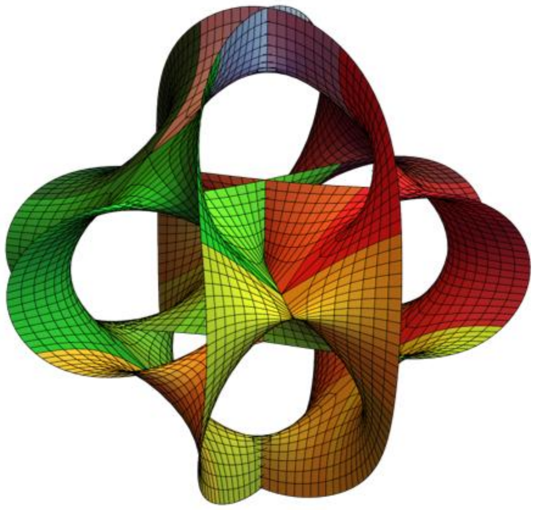

Рисунок – 3. $\mathbb{C}P^2$ сечение многообразия Калаби-Яу для $N = 3$.

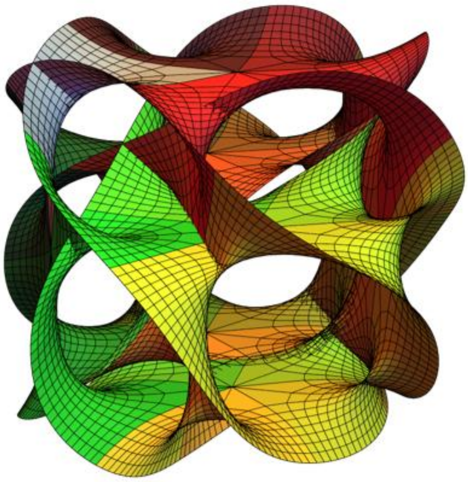

Рисунок - 4. $\mathbb{C}P^2$ сечение многообразия Калаби-Яу для $N = 4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За последние 30 лет взаимовлияние геометрии и физики было главным источником новых идей в математике; алгебраическая геометрия практически превратилась в раздел физики высоких энергий. Следует отметить также, что сами многообразия Калаби-Яу появились в математике еще до того, как теория струн появилась в теоретической физике. Поэтому независимо от того, признают ли теорию суперструн полноценной теорией, вписывающейся в современную парадигму, математика, лежащая в их основе, является абсолютно верной и строго доказанной, независимо от того, живем ли мы на самом деле в десятимерной Вселенной, состоящей из бран и суперструн.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Green, M. B. Anomaly Cancellation in Supersymmetric D=10 Gauge Theory and Superstring Theory / M. B. Green, J. H. Schwarz // Phys. Lett. B. – 1984. – V. 149. – P. 117-122.
2. Gross, D. J. The Heterotic String / D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec, R. Rohm // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V 54. – P. 502.
3. Candelas, P. Vacuum Configurations for Superstrings / P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger, E. Witten // Nucl. Phys. B. – 1985. – V. 258. P. – 46.
4. Богомольный, Е. В. Устойчивость классических решений / Е. В. Богомольный // Ядерная физика. – 1976. – Т. 24. – С. 861-870.
5. Candelas, P. Triadophilia: a special corner in the landscape / P. Candelas, X. de la Ossa, Y. He, B. Szendroi // Adv. Theor. Math. Phys. – 2008. – V. 12. – P. 429.
6. He, Y. H. The geometry of generations / Y. H. He, V. Jejjala, C. Matti, B.D. Nelson, M. Stillman // Commun. Math. Phys. – 2015. – V. 339. – P. 149.
7. Hanson, A. J. A Construction for computer visualization of certain complex curves / A.J. Hanson // Notices of the American Mathematical Society. – 1994. – V. 41. – P. 1156-1163.
8. Hanson, A. J. Techniques for visualizing Fermat’s last theorem: A case study / A. J. Hanson, P. A. Heng, and B. C. Kaplan // In Proceedings of Visualization 90. 1990. – P. 97–106.