МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА И НАИЛУЧШИЕ ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 - Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Мыльцина Виктора Леонидовича

Научный руководитель доцент, к. ф.-м. н., доцент	______________	В. Г. Тимофеев
Заведующий кафедрой и.о. зав. каф., к. ф.-м. н.	______________	А. М. Захаров

Саратов 2023

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Задача о наилучшем приближении неограниченного линейного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства решена в работах С.Б. Стечкина, так же дана постановка задачи, приведены первые принципиальные результаты и дано решение задачи для операторов дифференцирования малого порядка.

Возникновение и изучение этой задачи происходило в тесной взаимосвязи с исследованием экстремальных задач теории приближения функций, теории некорректных задач, вычислительной математики. Особенно большое взаимное влияние оказали задачи Стечкина (в особенности задачи о наилучшем приближении операторов дифференцирования ограниченными операторами в функциональных пространствах на числовой оси и полуоси) с одной стороны, а с другой - точные неравенства между нормами производных дифференцируемых функций (неравенства Колмогорова) и некорректная задача оптимальной равномерной регуляризации вычисления значений неограниченного оператора на элементах, заданных с ошибкой.

Неравенства, оценивающие нормы промежуточных производных функций одной и многих переменных через нормы самих функций и нормы производных более высокого порядка (неравенства типа Колмогорова или Ландау-Колмогорова), играют важную роль во многих областях математики и ее приложениях. Получению такого рода неравенств посвящены работы многих математиков. В настоящее время известно большое количество точных неравенств типа Колмогорова для функций одной переменной. Задача Колмогорова о необходимых и достаточных условиях существования функции, для которой данные числа являются точными гранями модулей ее производных соответствующих порядков приводит к таким неравенствам.

Целью бакалаврской работы является изучение неравенств типа Колмогорова и вычисление констант в этих неравенствах.

Объект исследования - дифференцируемые функции с ограниченной третьей производной.

Предмет исследования - неравенства типа Ландау - Колмогорова.

Для достижения поставленной цели в работе необходимо выполнить следующие задачи:

1. Изучение научной литературы по теме магистерской работы.
2. Построение неравенств типа Колмогорова или Ландау - Колмогорова.
3. Изучение свойств многочленов Чебышёва.
4. Восстановление полного доказательства теоремы о неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и ее производных на полупрямой.
5. Нахождение величины погрешности восстановления значений оператора дифференцирования для функции одной переменной с ограниченной третьей производной.
6. Получение точных констант в неравенствах для функций с ограниченной третьей производной ($n = 3$).
7. Построение экстремальных функций, для которых точные неравенства обращаются в равенство с наилучшей константой.
8. Разработка алгоритма для сравнения производных функций с соответствующими им операторами дифференцирования.

Практическая значимость работы состоит в том, что были найдены точные константы в неравенствах, построены экстремальные функции и вычислена величина погрешности восстановления значений оператора дифференцирования для функции одной переменной с ограниченной третьей производной.

Структура и содержание магистерской работы. Работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 21 наименования, на которые в тексте работы приведены ссылки.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение посвящено обоснованию актуальности выбранной темы работы, формулируется цель работы, приводится постановка необходимых задач, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В **первом разделе** приводятся основные понятия и задачи, связанные с темой магистерской работы. Связи между этими задачами и их способы решения.

Второй раздел содержит определение и свойства неравенств Чебышёва, которые необходимы для вывода теоремы о точном неравенстве для производных.

Восстановлено доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.3 Для произвольной функции $f(x)$ определенной со своими n производными на полупрямой верны соотношения

$$M_k(f) \leqslant P_{nk} M_0^{\frac{n-k}{n}}(f) M_n^{\frac{k}{n}}(f), \tag{1}$$

где $P_{nk} = \dfrac{n^2(n^2-1)(n^2-2^2)...(n^2-(k-1)^2)\left((2n-1)!!\right)^{\frac{k}{n}}}{n^2(n^2-1)(n^2-2^2)...(n^2-(n-1)^2)\left((2k-1)!!\right)^{\frac{k}{n}}}$, $k = 1, 2, ..n$, $M_k(f)$,$M_0(f)$, $M_n(f)$ – наибольшие значения на полупрямой абсолютных величин функции и ее k-ой и n-ой производных.

Третий раздел содержит главную часть работы: постановку задач и их решение, которое приведено через теоремы и их доказательства.

Пусть класс функций A такой что если

$$u \in A \;\; => \;\; ||u||_C \leqslant \alpha \;\wedge\; ||u'''||_{L_\infty} \leqslant \beta.$$

Решим следующие задачи. Для класса функций A при $n = 3$ найдем

1. величину

$$\omega_1(\alpha, \beta) = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_C : u \in A \right\}; \tag{2}$$

$$\omega_2(\alpha, \beta) = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_C : u \in A \right\}; \tag{3}$$

2. наилучшее приближение

$$E_{1,3}\left(N\right) = \inf_{||S||_C^C \leqslant N} \sup_{u \in Q} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} - S_u \right\|_C, \tag{4}$$

$$E_{2,3}\left(N\right) = \inf_{||S||_C^C \leqslant N} \sup_{u \in Q} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - S_u \right\|_C, \tag{5}$$

на множестве $Q = \{u : u \in C, u \in A, \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L_\infty} \leqslant \beta\}$, $||T_u||_C^C \leqslant N$, $N > 0$;

3. вычислена величина погрешности восстановления значений оператора

дифференцирования для случая $\mathfrak{M} = \mathscr{O}$ или $\mathfrak{M} = \mathscr{L}$

$$\nu_{\alpha,1}\left(\mathfrak{M}\right) = \inf_{S\in\mathfrak{M}} \sup_{u\in Q, v\in C, ||u-v||_C<\alpha} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} - S_v \right\|_C. \tag{6}$$

$$\nu_{\alpha,2}\left(\mathfrak{M}\right) = \inf_{S\in\mathfrak{M}} \sup_{u\in Q, v\in C, ||u-v||_C<\alpha} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - S_v \right\|_C. \tag{7}$$

Для решения поставленных задач необходимо построить функции $\Phi_1(x)$ и $F(x)$. $\Phi_1(x)$ как функцию из L_∞. $F(x)$ это функция для которой построим оператор наилучшего приближения, ограниченная функция с ограниченной третьей производной.

Далее обозначим

$$\omega(\alpha,\beta) = \mu_1, \quad \alpha = \mu_1, \quad 1 = \beta = \mu_3. \tag{8}$$

Для доказательства теорем используется интегральное представление

$$\int_0^\infty F'''(t)\Phi_j(t)dx = F''(t)\ \Phi_j(t)\big|_0^{3h} - \int_0^{3h} F''(t)\Phi'(t)dx = -F''(0)\Phi_j(0) - \left(F'(t)\Phi_j'(t)\big|_0^{3h} - \right. \tag{9}$$

$$\left. -\int_0^{3h} F'(t)\Phi_j''(t)dt \right) = -F''(0)\Phi_j(0) + F'(0)\Phi_j'(0) - \left(F(t)\Phi_j''(t)\big|_0^{3h} - \int_0^{3h} F(t)d\Phi_j''(t) \right) =$$

$$= -F''(0)\Phi_j(0) + F'(0)\Phi_j'(0) - F(0)\Phi_j''(0) - \int_0^{3h} F(t)d\Phi_j''(t).$$

ТЕОРЕМА 3.1 В задаче (2)

$$\omega(\alpha,\beta) = \mu_1 \leqslant \frac{3\sqrt[3]{9}}{2}\mu_0^{\frac{2}{3}}\mu_3^{\frac{1}{3}}. \tag{10}$$

и оператор наилучшего приближения имеет вид

$$S_{1,3}\left(F,x\right) = \frac{1}{6h}\left\{-8F(x) + 9F(x+h) - F(x+3h)\right\}. \tag{11}$$

ТЕОРЕМА 3.2 Наилучшее приближение в задаче (3) в случае первой производной

$$E_{1,3}\left(N\right)=\frac{9\mu_3}{2N^2}.$$

.

ТЕОРЕМА 3.3. Для первой производной величина погрешности восстановления имеет вид

$$\nu_\alpha(\mathscr{O})=\nu_\alpha(\mathscr{L})=\frac{3\sqrt[3]{9}\alpha^{\frac{2}{3}}}{2}. \tag{12}$$

Здесь $\beta=\mu_3=1$.

Доказательство. Положим

$$\mathscr{E}(\alpha)=\inf_{N>0}\left\{E(N)+\alpha\cdot N\right\},$$

тогда получим уравнение для нахождения экстремума $E'(N)+\mu_0=0$. Здесь $E(N)$ по формуле (**??**)

$$-\frac{9\mu_0}{N^3}+\mu_0=0\ \Rightarrow\ \mu_0=\frac{9\mu_0}{N^3}\ \Rightarrow$$

$$N^2=9\frac{\mu_3}{\mu_0}\ \Rightarrow\ N=\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{\frac{\mu_3}{\mu_0}}.$$

Подставляем в () получаем

$$\mathscr{E}(\mu_0,\mu_3)=\frac{9\mu_3\sqrt[3]{\mu_0^2}}{2\sqrt[3]{81}\sqrt[3]{\mu_3^2}}+\mu_0\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{\frac{\mu_3}{\mu_0}}=\frac{3\sqrt[3]{9}\sqrt{\mu_0^2}\sqrt{\mu_3}}{2}$$

В силу обозначений (8) получаем формулу (12). □

Далее приведем теоремы для решения задач (3), (5), (7) в случае второй производной.

ТЕОРЕМА 3.4. В задаче (4) величина $\omega(\alpha,\beta)$ имеет вид

$$\omega(\alpha,\beta)=\mu_2\leqslant 2\sqrt[3]{3}\mu_0^{\frac{1}{3}}\mu_3^{\frac{2}{3}}. \tag{13}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы воспользуемся доказательством теоремы **??**. По построению многочлена $p_0(x-b)$ получаем, что

$$\mu_2 \leqslant \left|\mu_3\left(-3\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\frac{\mu_0}{\mu_3}}\right)+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\mu_3\sqrt[3]{\frac{\mu_0}{\mu_3}}\cdot 2\right| = \left|-3\sqrt[3]{3}\mu_0^{\frac{1}{3}}\mu_3^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{3}\mu_0^{\frac{1}{3}}\mu_3^{\frac{2}{3}}\right|.$$

Поэтому μ_2 удовлетворяет равенству

$$\mu_2 \leqslant 2\sqrt[3]{3}\mu_0^{\frac{1}{3}}\mu_3^{\frac{2}{3}}. \tag{14}$$

□

ТЕОРЕМА 3.5 Величина наилучшего приближения в случае второй производной равна

$$E_{2,3} = -\mu_3\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{N}}.$$

и оператор наилучшего приближения имеет вид

$$S_{2,3}\left(F,x\right) = \frac{1}{3h^2}\left[2F(x)-3F(x+h)+F(x+3h)\right]. \tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим $\Phi(\mu_3) = 2\sqrt[3]{3}\mu_0^{\frac{1}{3}}\mu_3^{\frac{2}{3}}$ и $N = \frac{1}{3}2\sqrt[3]{3}\left(\frac{\mu_3}{\mu_0}\right)^{\frac{2}{3}}$. Тогда оценка снизу имеет вид

$$E_{2,3} \geqslant 2\sqrt[3]{3}\mu_0^{\frac{1}{3}}\mu_3^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}2\sqrt[3]{3}\mu_3^{\frac{2}{3}}\mu_0^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{\sqrt[3]{9}}\mu_0^{\frac{1}{3}}\mu_3^{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом имеем

$$\begin{cases} \mu_0^{\frac{2}{3}} = \frac{2\mu_3^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{9}N}, \\ \left(\sqrt[3]{\frac{\mu_0}{\mu_3}}\right)^2 = \frac{h^2}{\sqrt[3]{9}}, \end{cases} \quad => \quad h = \sqrt{\frac{2}{N}} \quad \text{или} \quad N = \frac{2}{h^2}.$$

Тогда

$$E_{2,3}\left(N\right) \leqslant \frac{4\sqrt{2}\mu_3}{3\sqrt{N}}.$$

Опять воспользуемся интегральным представлением (9), где $\Phi_2(t) =$

$\Phi_2'(t) = \Phi_2''(t) = 0$ при $t \in [3h, \infty)$, получим

$$-F''(0)\Phi_2(0) + F'(0)\Phi_2'(0) = F(0)\Phi_2''(0) + \int\limits_0^3 hF(t)d\Phi_2''(t) + \int\limits_0^3 hF'''(t)\Phi_2(t)dt,$$

или

$$-F''(0)\Phi_2(0) + F'(0)\Phi_2'(0) = F(0)\Phi_2''(0) + F(h)\left[\Phi_2''(h+0) - \Phi_2''(h-0)\right] +$$

$$+F(3h)\left[\Phi_2''(3h+0) - \Phi_2''(3h-0)\right] + \int\limits_0^{3h} F'''(t)\Phi_2(t)dt.$$

Построим функцию $\Phi_2(t)$ так чтобы $\Phi_2(0) = -1$, $\Phi_2'(0) = 0$, $\Phi_2(3h) = 0$, $\Phi_2'(3h) = 0$ и $\Phi_2(t) = at^2 + bt + c$. Тогда

$$\Phi_2(t) = \begin{cases} -1 + at^2, & t \in [0, h) \\ -1 + at^2 + b(t-h)^2, & t \in [h, 3h) \\ 0 & t \in [3h, \infty). \end{cases}$$

И после вычисления коэффициентов примет вид

$$\Phi_2(t) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{3h^2}t^2, & t \in [0, h) \\ -1 + \frac{1}{3h^2}t^2 - \frac{1}{2h^2}(t-h)^2, & t \in [h, 3h) \\ 0 & t \in [3h, \infty). \end{cases}$$

Строим оператор

$$S_{2,3}(F, x) = F(x)\frac{2}{3h^2} + F(x+h)\left(-\frac{1}{3h^2} - \frac{2}{3h^2}\right) + F(x+3h)\left(-\frac{1}{3h^2}\right) \quad =>$$

$$S_{2,3}(F, x) = \frac{1}{3h^2}\left[2F(x) - 3F(x+h) + F(x+3h)\right].$$

Вычисляем величину наилучшего приближения, получаем

$$E_{2,3} = -\mu_3 \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{N}}.$$

$\square$

ТЕОРЕМА 3.6. Для второй производной величина погрешности восстановления имеет вид

$$\mathscr{E}(\alpha) = \nu_\alpha(\mathscr{O}) = \nu_\alpha(\mathscr{L}) = 2\sqrt[3]{3}\alpha^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Здесь $\beta = \mu_3 = 1$.

Доказательство. Имеем

$$\omega(\alpha, 1) = 2\sqrt[3]{3}\alpha^{\frac{1}{3}},$$

$$E_{2,3} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{N}},$$

и $h = \sqrt{\frac{2}{N}}$.

$\mathscr{E}(\alpha)$ это наибольшее значение функции $E_{2,3}\,(N)$. Найдем его, для чего продифференцируем равенство по N и приравняем нулю. Получаем

$$\mathscr{E}'(\alpha) = -\frac{4\sqrt{2}}{3 \cdot 2\sqrt{N^3}} + \alpha = 0.$$

$$\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{N^3}} \;\; => \;\; \sqrt{N^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3\alpha} \;\; =>$$

$$N^3 = \frac{8}{9\alpha^2} \;\; => \;\; N = \frac{2}{\sqrt[3]{9}\alpha^{\frac{2}{3}}}.$$

Вычисляем $\mathscr{E}(\alpha)$ и получаем величину погрешности восстановления.

$$\mathscr{E}(\alpha) = \frac{4\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\alpha^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt{2}} + \frac{2\alpha^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{9}} =$$

$$= \frac{4\sqrt[3]{\alpha^{\frac{1}{3}}}}{3} + \frac{2\sqrt[3]{3}\alpha^{\frac{1}{3}}}{3} = 2\sqrt[3]{3}\alpha^{\frac{1}{3}},$$

а при $h = \sqrt{\frac{2\sqrt[3]{9}\alpha^{\frac{2}{3}}}{2}}$ получаем

$$\mathscr{E}(\alpha) = \sqrt[3]{3\alpha}.$$

$\square$

Четвертый раздел содержит численный эксперимент, в котором приведено сравнение ошибок, полученных при замене производной функции $F(x)$ на приближающую ее функцию, т.е. оператор $S_{i,3}(F,x)$ $(i = 1, 2)$, которая является многочленом наилучшего равномерного приближения, и за приближенное значение $f^{(i)}(x)$ взять $S_{i,3}(F,x)$. Сравнение проведено с помощью построения графиков самих производных функции и операторов дифференцирования.

В **заключении** приведены результаты магистерской работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Найдена величина ω - верхняя грань нормы оператора дифференцирования.
2. Найдено наилучшее приближение оператора дифференцирования, для чего было изучены свойства многочленов Чебышёва. Написан программный код для их вычисления и построения.
3. Найдена величина погрешности восстановления значений оператора дифференцирования для функции одной переменной с ограниченной третьей производной.
4. Изучено построение неравенств типа Колмогорова или Ландау - Колмогорова.
5. Были найдены точные константы в неравенствах для $n = 3$.
6. Построены экстремальные функции, для которых точные неравенства обращаются в равенство с наилучшей константой.