МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Двоичные базисные сплайны и алгоритм Чайкина

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 218 группы

направления ***01.04.02 – Прикладная математика и информатика***

механико-математического факультета

Нво Мбелы Исмаэля

Научный руководитель

профессор, к.ф.-м.н., профессор		С.Ф. Лукомский
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

и. о. зав. кафедрой, к.ф.-м.н.		А. М. Захаров
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2023

ВВЕДЕНИЕ

Теория сплайн-функций и их приложений возникла относительно недавно. Еще в 1960 году было всего несколько статей, в которых сплайн-функции упоминались по имени. Сегодня, менее чем через 20 лет, по этому вопросу опубликовано более 1000 исследовательских работ, и он остается активной областью исследований.

Быстрое развитие сплайн-функций связано прежде всего с их большой полезностью в приложениях. Классы сплайн-функций обладают многими хорошими структурными свойствами, а также превосходными аппроксимационными возможностями. Поскольку их легко хранить, оценивать и обрабатывать на цифровом компьютере, было найдено множество приложений для численного решения различных задач прикладной математики. К ним относятся, например, подгонка данных, аппроксимация функций, числовые квадратуры и численное решение операторных уравнений, таких как уравнения, связанные с обыкновенными уравнениями и уравнениями в частных производных, интегральные уравнения, задачи оптимального управления и так далее. Программы, основанные на сплайн-функциях, нашли свое применение практически в каждой вычислительной библиотеке.

Похоже, что самые бурные годы в развитии сплайнов позади, и теперь общепризнано, что они станут прочно укоренившейся частью теории приближений и численного анализа. Таким образом, моя цель здесь состоит в том, чтобы представить довольно полную и унифицированную трактовку сплайн-функций, которая, я надеюсь, окажется полезным источником информации для теоретиков аппроксимации, численных аналитиков, ученых и инженеров.

При проведении научных вычислительных экспериментов однофакторную связь между входной и выходной величинами обычно определяют посредством вычислений либо измерений. Результатом являются данные в виде набора точек на плоскости.

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), \Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Для заданных входных дан необходимо получить плавную кривую, которая должна проходить через экспериментальные точки. Проблема можно решить с помощью использования интерполяционных методов. При наборов небольших количествах точек удовлетворительные результаты дают интерполяционные методы Лагранжа, Ньютона, Стирлинга. Однако при больших наборах количества точек или возрастанием степени полинома погрешность интерполяции стремится к бесконечности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x)-P_n(x)\right|\right)=\infty$$

Этого недостатка интерполяционные полиномы, часто широкое возникается в практических приложениях, при численном решении нелинейных уравнений, сглаживании функций, сжатии и восстановлении графических изображений, ряде других применений, и.д. Наиболее известным среди них является B-сплайн Карри(Curry) и Шенбергом(Schoenberg) . Сплайн обеспечивает безупречную гладкость интерполянта для равноотстоящих точек , для которых $(\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$, $h = x_i - x_{i-1}$.

Таким образом, актуальной является задача разработки интерполяционный базисный сплайн 2-ой степени, который характеризуется меньшими выбросами B-сплайнов и существенно менее выраженными кусочными многочленами 2-ой степени. Наряду с этим поставлена задача создания такой модели сплайна, которая не уступала бы по скорости вычислений алгоритму интерполяционного базисного сплайн 2-ой степени при изменении одной или нескольких точек, что в сравнении с B-сплайном является характерным преимуществом данного сплайна.

Целью данной работы является изучение двоичных базисных сплайнов и алгоритма Чайкина.

Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

1. Изучение метода Чайкина
2. Построение интерполяционного сплайна 2-й степени
3. Построение кривой Чайкина с помощью двоичных базисных сплайнов
4. написание программы, реализующей этот алгоритм

Работа состоит из:введения, с определениями; два основных раздела: практический и теоретический. Теоретическая часть состоит из 5 разделов, некоторые из них разделены на пункты. Практическая часть состоит из нескольких подразделений; списка использованных литературных источников; заключения;приложения.

В первом разделе "Сплайн Функции"даются некоторые базовые определения, касающиеся полиномиальных сплайнов, в частности, базисные сплайны Шенберга и Стрембурга

Во втором разделе "Интерполяционный многочлен 2-ой степени"проводятся некоторые базовые определения, доказательство о существовании и сходимости интерполяционного многочлена второй степени. В третьем разделе описывается алгоритм Чайкина

В четвертом разделе рассматривается интерполяция двоичными базисными сплайнами 2-й степени В пятом разделе описывается алгоритм интерполяционных сплайнов 2-й степени. Раздел включает в себя построение кривой с помощью двойных базисных сплайнов и узлы интерполяции лежат между точками склейки.

Практическая часть содержит результат численных экспериментов.

Заключение.

Определение 0.1. Кусочно-полиномиальной функцией будем называть интерполяционном сплайна S, $S : [a, b] \implies \mathbb{R}$,отрезка $[a, b]$ разобьем на неубывающей последовательности упорядоченным подынтервалы:

$$[x_i, x_{i+1}], \qquad (i = 0, 1, ..., k-1) \tag{1}$$

$$[a, b] = [x_0, x_1) \cup [x_1, x_2) \cup ... \cup [x_{k-1}, x_k) \cup [t_k] \tag{2}$$

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2, ..., \leqslant x_{k-1} \leqslant x_k = b, \tag{3}$$

для каждого подынтервала k определим $S(x)$ виде кусочно-многочленном $P_i(x)$ степени $\leqslant n$. Тогда

$$S(x) = \begin{cases} P_0(x), & x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ P_1(x), & x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \\ P_2(x), & x_2 \leqslant x \leqslant x_3 \\ \vdots \\ P_{k-1}(x), & x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k \end{cases} \tag{4}$$

Данные $k+1$ точек x_i называются узлами. Вектор $X = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_k\}$ называется вектором узла для сплайна $S(x)$.

0.1 Базисные сплайны Шёнберга

B-сплайны были впервые введены Шенбергиным.

Определение 0.2. Даны k, $n \in \mathbb{N}$ и последовательность узлов

$$\Delta : \{a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant ... \leqslant t_{n+k} = b\}, \qquad t_i < t_{i+k} \tag{5}$$

разделенный разность будем обозначать $f(t_0, ...t_{i+k})$, для функции f которая определяется с помощью следующие выражения:

$$f(t_0, ..., t_{k+1}) = \frac{f(t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+k}) - f(t_i, t_{t+1}, t_{i-k})}{t_{i+k} - t_i}, \tag{6}$$

последовательность B-сплайна $(N_i)_{i=1}^n$ порядка k определяются как

$$N_i(t) = (t_{i+k} - t_i) f(t_0, ...t_{i+k})(x - t)_+^{(k-1)}, \tag{7}$$

где усеченная функция $(x - t)_+^{(k-1)}$, определяется как:

$$(x - t)_+^{k-1} = \begin{cases} (x - t)^{k-1}, & \text{если} \quad t > x \\ 0, & \text{если} \quad t \leqslant x \end{cases} \tag{8}$$

B-сплайны обладают следующими свойствами.

1.

$$\sum_i N_i(t) \equiv 1, \qquad t \in [t_k, t_{n+1}] \tag{9}$$

Доказательство. Используя определение [7], и свойства разделенных разностей. Тогда

$$\begin{aligned} N_i(t) = (t_{i+k} - t_i) f(t_0, ...t_{i+k})(x - t)_+^{(k-1)} = f(t_{i+1}, t_{t_{i+k}}) - \\ - f(t_i, t_{i+k-1})(t - x)_+^{k-1} \end{aligned} \tag{10}$$

таким образом

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(t) = (f(t_{i+1}, t_{t_{i+k}}) - f(t_1, t_k))(x-t)_+^{k-1} \tag{11}$$

При $t \geqslant t_k$, зачем $(x-t)_+^{k-1} = 0$, когда $x = t_1, ..., t_k$ следовательно,

$$[t_1...t_k](x-t)_+^{k-1} = 0, \text{При } \ t \geqslant t_{n+1}, \ \text{ зачем } \ (x-t)_+^{k-1} = (x-t)^{k-1},$$

$$\text{когда } \quad x = t_{n+1}, ..., t_{n+k} \ \text{ следовательно}, f(t_{n+1}...t_{n+k})(x-t)_+^{k-1} = 1$$

$\square$

2. используя соотношение [7], получают рекуррентную формулу для N_i, которая используется чаще и имеет несколько иной вид

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i-k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \tag{12}$$

3. положительность. Поскольку $N_{i,1}$ — просто ступенчатая функция с носителем на $[t_i, t_{i+1}]$, а именно

$$N_{i,1} := \chi_{[t_i, t_{i+1}]} = \begin{cases} 1, & x \in [t_i, t_{i+1}); \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \tag{13}$$

рекуррентность [12] обеспечивает непосредственно конечность носителя B-сплайнов и их положительность

$$N_{i,k} = [t_i, t_{i+k}], \qquad N_{i,k} > 0, \qquad [t_i, t_{i+k}]$$

0.2 Базисные сплайны Стремберга

B-сплайны на равномерной сетке были определены в терминах сверток и подробно изучены Стрембергом, Баттлом и Лемарье. Функции $N_n(x)$

определяются

$$N_0(x) = 1_{[0,1]}(x), \qquad N_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} N_n(x-t)N_0(t)dt = \int_{x-1}^{x} N_n(t)dt \tag{14}$$

и называются B-сплайнами Стремберга $n+1$ порядка. Любой сплайн n-й степени построенный системе узлов $(x_k) = \mathbb{R}$ представим в виде ряда по системе сдвигов $N_n(x-k)$, $k \in \mathbb{R}$. B-сплайн Стремберга $(n+1)$ порядка есть многочлен n-й степени на каждом отрезке $[k-1, k], (k = 0, 1, ..., n+1)$.

0.3 Интерполяционный многочлен 2-ой степени

0.4 Существование и сходимость

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы сетка:

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b \tag{15}$$

и непрерывная периодическая функция $f(x)$ с периодом $b-a$.Будем называть функцию $S_2(x)$ периодическим сплайном второй степени с периодом $b-a$, для функцию $f(x)$ на сетке Δ, если выполняются следующие условия: Этими свойствами дают $(n+1)$ и нам надо еще понабиться 2 дополнительные условии так как сплайн второй степени имеет $(n+3)$ параметра, найдем их как следующий образом Положим

$$h_k = x_{k-1} - x_k,$$

$$f(x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h_{k+1} - h_k} \tag{16}$$

$$f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = \frac{\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{h_{k+1}-h_k} - \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{h_k-h_{k-1}}}{h_{k+1} - h_{k-1}} = \frac{f(x_k, x_{k+1}) - f(x_{k-1}, x_k)}{h_{k+1} - h_{k-1}} \tag{17}$$

представим $S_2(x)$, в следующим виде

$$S_2(x) = S_2(a) + S_2^{'}(a)(x-a) + \int_0^x S_2^{''}(t)(x-t)dt \tag{18}$$

И потребуется, чтобы выполнилось условие

$$S_2(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) \tag{19}$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k} S''_{k-1} + 3S''_k + \frac{h_k}{h_{k-1}+h_k} S''_{k+1} = 8f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}), \ k = 1, 2, ..., n \\ S''_0 = S''_n, \ S''_{n+1} = S''_1. \end{cases} \tag{20}$$

Допустим

$$\alpha = \max_k \alpha_k, \qquad \alpha_= h_k|S''_k|,$$

$$\beta = \max_k \beta_k, \qquad \beta = h_{k-1}|S''_k|,$$

$$\gamma = \max(\alpha, \beta), \qquad \delta = \max_k h_k$$

Лемма 0.1. Если сплайн $S_2(x)$ 2-ой степени интерполирует в узлах сетки [15], периодическую функцию $f(x)$ с периодом $b - a$, тогда

$$\gamma \leqslant 16 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\omega(h_k, f)}{h_k}, \tag{21}$$

$$\max_k |S''_k| \leqslant 16 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{h^{-1}_{k-1}\omega(h_{k-1}, f) + \omega(h^{-1}_k, f)}{h_{k-1} + h_k} \tag{22}$$

Если кроме того, $f(x)$ имеет непрерывную первую производную, то

$$\gamma \leqslant 16\omega(\delta, f'). \tag{23}$$

Лемма 0.2. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $b - a$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$и сплайн $S''(x)$ 2-ой степени интерполирует функцию в узлах сетке [15], то

$$||S''_k - S''_{k-1}|| = \max_k |S''_k - S''_{k-1}| \leqslant 8\omega(\delta, f''). \tag{24}$$

Теорема 0.1. Если периодический сплайн $S_2(x)$ 2-ой степени интерполирует в узлах [15], непериодическую функцию $f(x)$ с периодом $b - a$ и $\delta = \max_k h_k$, то

$$||f(x) - S_2(x)|| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - S_2(x)| \leqslant \omega(\delta, f) + \delta L, \tag{25}$$

где

$$L = 8 \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} h_k^{-1} \omega(h_k, f) \tag{26}$$

0.5 Интерполяция двоичными базисными сплайнами 2-ой степени

Для построения двоичного базисного сплайна 2-ой степени, необходимо дважды интегрировать функцию Уолша W_3.

Обозначим $r_n(x)$ – функцию Радемахера, $x \in [0, 1]$,
где n-номер функции, $n = (0, 1, 2, ...)$. Для $n = 0$, функцию Радемахера $r_0(0) \equiv 1$, а с номерами $n \geqslant 1$ имеют вид:

$$r_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right) \quad k = \overline{1, 2^{n-1}}; \\ -1, & x \in \left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right) \quad k = \overline{1, 2^{n-1}}; \\ 0, & x = \frac{k}{2^n}, k = \overline{0, 2^n} \end{cases} \tag{27}$$

Ниже на картинках [1],[2] и [3] приведены примеры графики функции Радемахера:

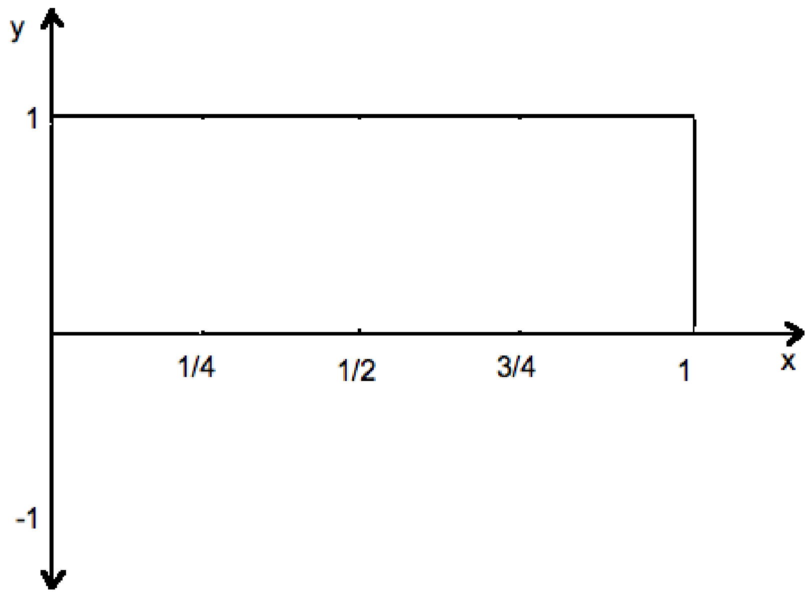

Рисунок 1 – Функция Радемахера $r_0(x)$

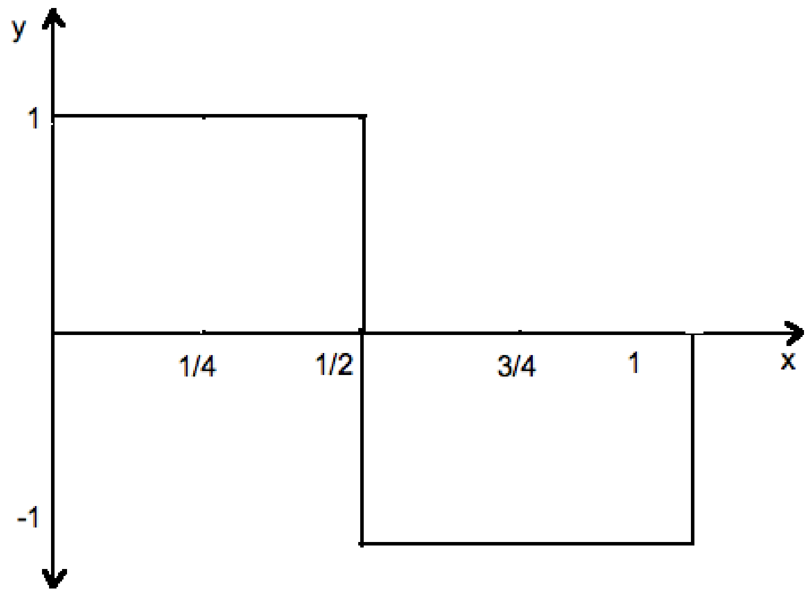

Рисунок 2 – Функция Радемахера $r_1(2x)$

С помощью системой функции Радемахера можно построить функции Уолша $w_n(x)$, $(n = 0, 1, 2, ...)$,
где $x \in [0, 1]$.

Функцию Уолша с номером ноль равна $w_0(x) \equiv 1$, а остальные с номером $n \geqslant 1, n \in \mathbb{N}$ через разложение число n в разложением по степеням 2

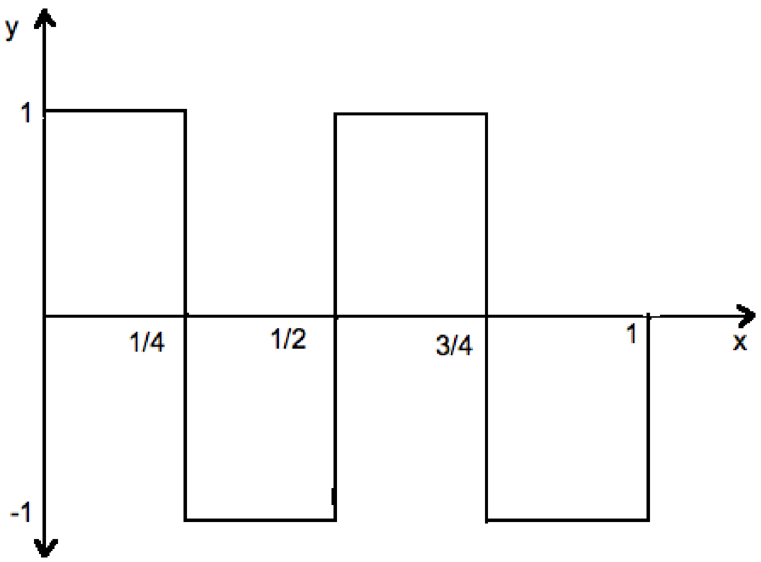

Рисунок 3 – Функция Радемахера $r_2(3x)$

$$n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + 2^{m_3} + ... + 2^{m_p} \tag{28}$$

где $0 \leqslant m_1 < m_2 < m_3 < .... < m_p$ Тогда

$$W_n(x) = r_{m_1+1}(x) r_{m_2+1}(x) \dots r_{m_p+1}(x) \tag{29}$$

Образующие функции для системы Уолша-Пэли совпадают с функциями Радемахера определяются как

$$W_{2^n-1}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} r_k(x) \tag{30}$$

Система Уолша $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной системой функций в пространстве $L_2[0,1]$ Однако, в отличие от системы Радемахера, система Уолша полна.

Положим

$$If(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad (x \in [0,1]) \tag{31}$$

Определение 0.3. Функцию двоичной базисной сплайна 2-й степени определим через следующие выражение:

$$\psi(x) = \begin{cases} (4I)^2 W_3(x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases} \tag{32}$$

Функция Уолша $W_3(x)$ это есть произведение функции Радемахера $r_1(x)$ и $r_2(x)$

$$W_3(x) = r_1(x) r_2(x). \tag{33}$$

Ниже на картинке показана функция Уолша $w_3(x)$.

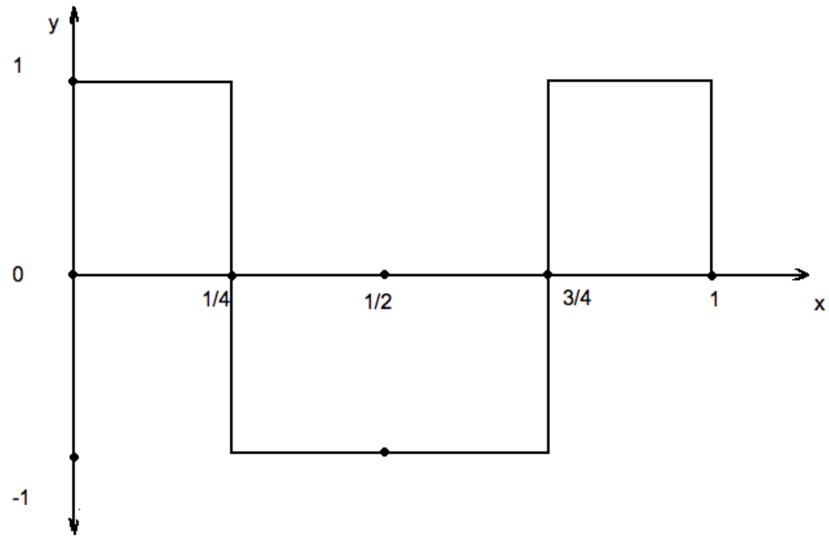

Рисунок 4 – Функция Уолша $W_3(x)$

Представим функцию Уолша $W_3(x)$ в следующим виде:

$$W_3(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ -1, & x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \\ 1, & x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases} \tag{34}$$

После получения функции Уолша $W_3(3)$[4], из [32] можно вычислить функцию двоичный базисный сплайн 2-ой степени $\psi(x)$. Каждый ее составляющий, есть кусочно-монотонная функция, совпадающая с многочленом 2-ой степени на каждом отрезке $\left[\frac{k+1}{4}, \frac{k+1}{4}\right]$, $\quad (k = 1, 2, 3)$. На рисунках [5] и [6] приведены графики функции $\frac{1}{4}\psi'$ и ψ

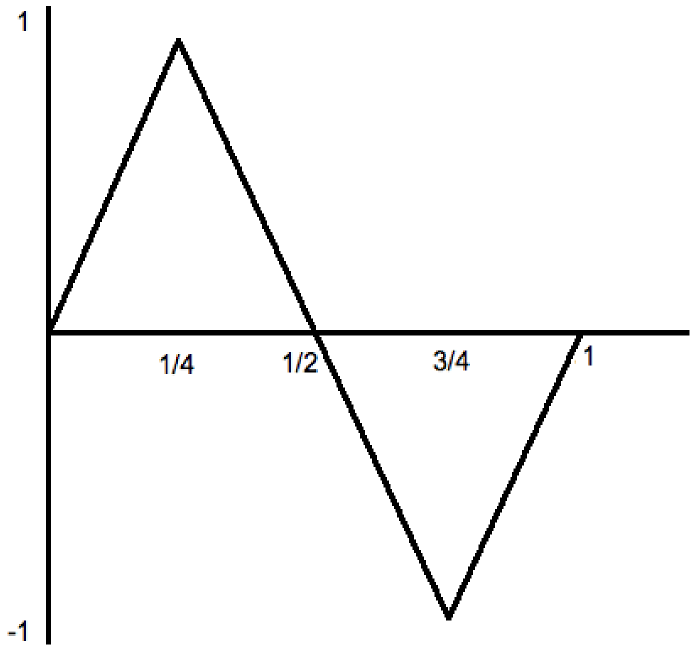

Рисунок 5 – $(4I)W_3(x)$

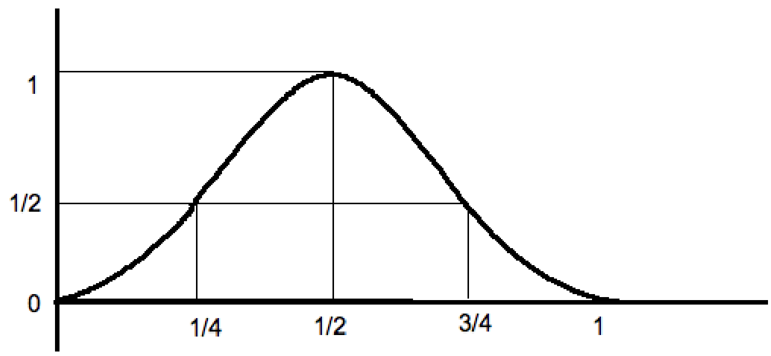

Рисунок 6 – $(4I)^2W_3(x)$

Теорема 0.2. При всех $x \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\sum_{n\in\mathbb{R}} \psi\left(x+\frac{n}{4}\right)=2, \quad \sum_{n\in\mathbb{R}} \psi\left(x+\frac{n}{2}\right)=1 \tag{35}$$

Каждая функция ψ справедливы равенства [0.2], это значит, что совокупность функций $\psi\big(x+\frac{n}{4}\big)$ есть линейная комбинация остальных. Поэтому любая функция $f \in Q_2[0,+\infty)$ можно единственным образом представить в виде

$$f(x)=\sum_{k=-3,k\neq -1} c_k\psi\left(x-\frac{k}{n}\right),\qquad (k=-3,-2,0,1,...,n-1) \tag{36}$$

где c_k – некоторые коэффициентов

Теорема 0.3. Совокупность функций $\psi\left(x-\frac{n}{4}\right)$, $(n\geqslant -3, n\neq -1)$ образуют базис в пространстве $Q_2[0,+\infty)$.

Алгоритм Чайкина алгоритме Чайкина начиная с исходной кривой с определенными точками $P_0, P_1, ..., P_n$, для каждого шага разбиения создаются новые вершины между точками P_i, P_{i+1}. Новые точки вычисляются с помощью уравнения 0.5

$$\begin{aligned} q_{2i}^{k+1} &= \frac{3}{4}p_i^k + \frac{1}{4}p_i^k \\ q_{2i+1}^{k+1} &= \frac{1}{4}p_i^k + \frac{3}{4}p_i^k \end{aligned} \tag{37}$$

Предел последовательности управляющих многоугольников, сгенерированных алгоритм Чайкина, сходится к квадратичной однородной кривой B-сплайна.

1 Численные эксперименты

В численном эксперименте были использованы два алгоритма для восстановления недостатка данных: алгоритм Чайкина который также называется алгоритмом среза уголков (подразделение поверхности позволяет сглаживать поверхность полигональными сетками. Окончательная гладкая поверхность вычисляется из исходной сетки путем рекурсивного подразделения каждой многоугольной грани на более мелкие грани, которые лучше аппроксимируют гладкую поверхность) и алгоритм двоичного базисного сплайна второй степени, который позволяет сглаживать поверхность в виде линейных комбинаций базисных сплайнов второй степени, которые проходят посредине входных данных.

Даны следующие входные данные в виде таблице [1]

Таблица 1 – входные данные

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	2.0	1.0	3.0	3.0	2.0	3.0	2.5	1.0	2.0	1.0	1.5

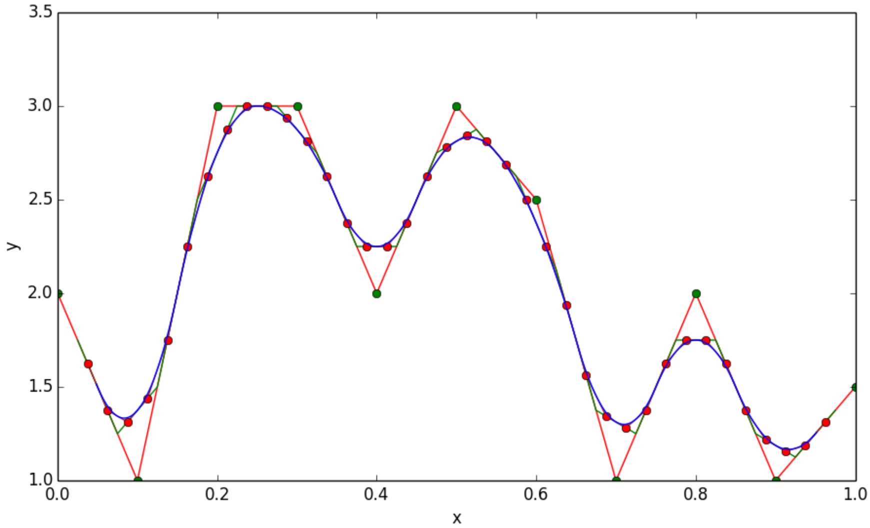

Рисунок 7 – Реализация алгоритма Чайкина

На картинке [7] показана реализация алгоритма Чайкина. При $n = 10$, Зелеными точками отмечены входные данные, красная ломаная линейная функция проходит через точки, в красной отметки получены из предыдущей шагов алгоритма Чайкина, а в синей полученная гладкая кривая после несколько шагов.

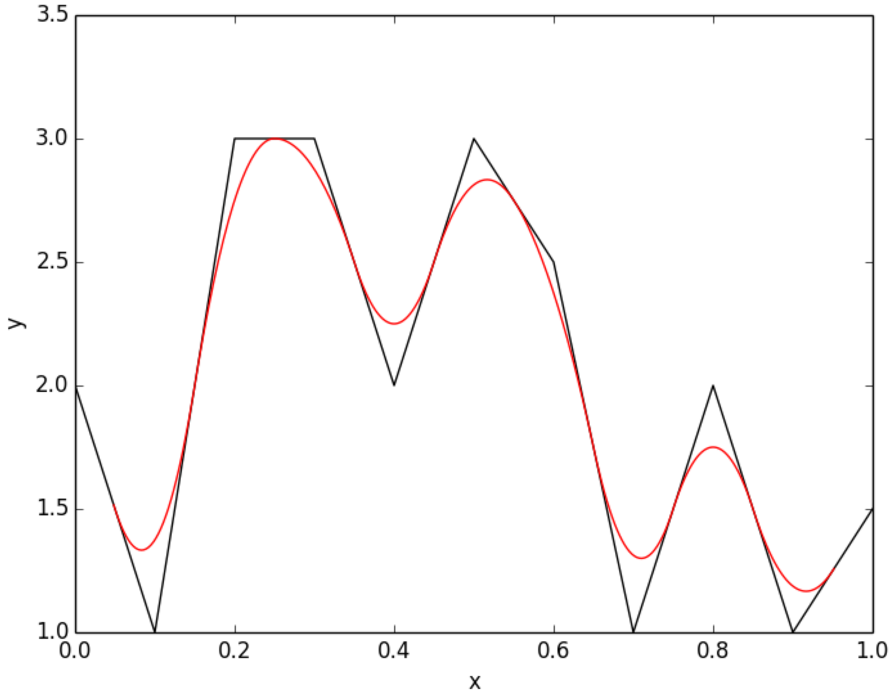

Рисунок 8 – Реализация алгоритма двоичного базисного сплайн 2-ой степени

На картинке [8] показана реализация алгоритма двоичного базисного сплайна второй степени. При $n = 20, m_0 = 2.0000$,черным изображен график входных данных, а красным полученная с помощью алгоритма двоичных базисных сплайнов 2-ой степени.

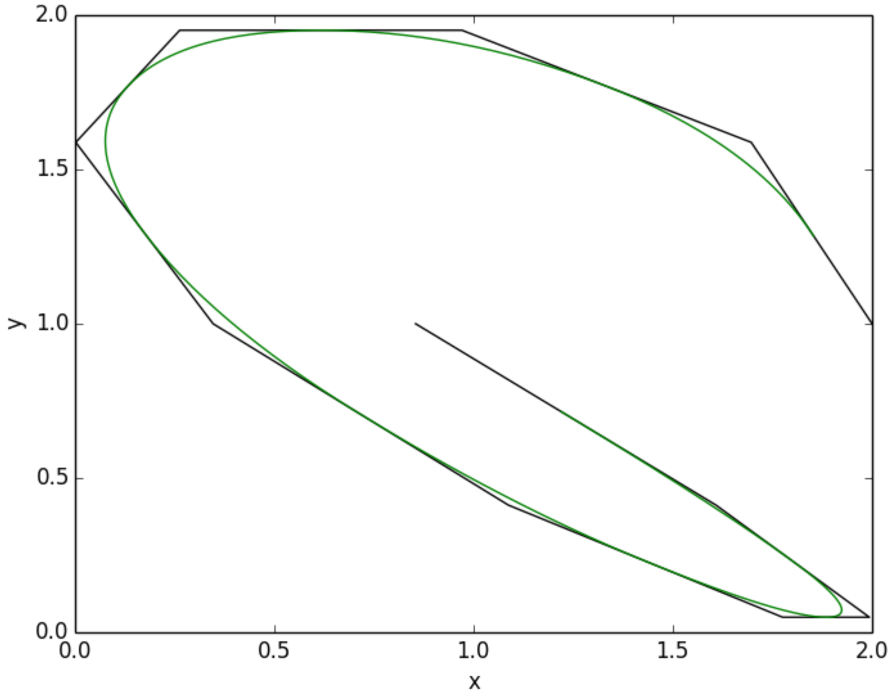

Рисунок 9 – Реализация алгоритма двоичного базисного сплайн 2-ой степени при $m_x = 1.99999998, m_y = 0.9999989$

На картинке [9] показана реализация алгоритма двоичного базисного сплайна второй степени. При $n = 20$, в графике черным изображена параметрическая кривая виде $(x, y) = (\cos 8t + 1, \sin 2\pi t + 1)$, а графика в зеленой полученная с помощью алгоритма двоичных базисных сплайнов 2-ой степени.

Таблица 2 – Параметрические входных данных

t	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	1
$x(t)$	0	0	0	1/2	1	1	1	1/2	0
$y(t)$	0	1/2	1	1	1	1/2	0	0	0

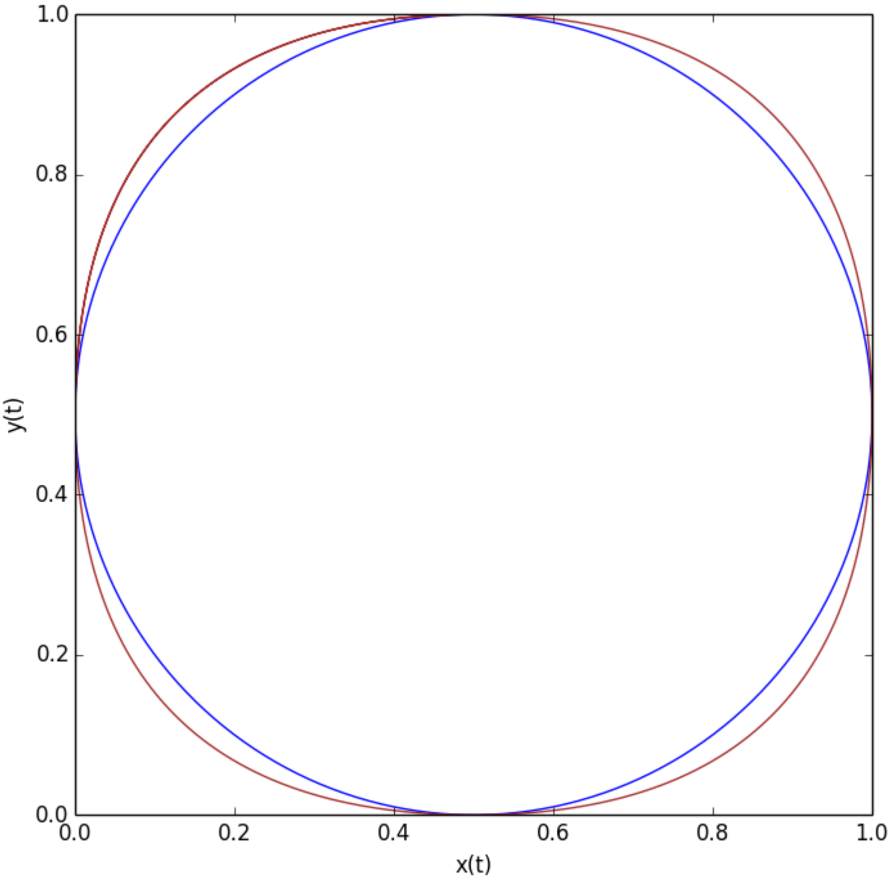

Рисунок 10 – Реализация интерполяционного сплайна 2-ой степени

На рисунке показана реализация алгоритма двоичного базисного сплайна 2-й степени. При $n = 8, m_0 = 0.00001$, красным цветом изображена приближенная окружность, полученная с помощью реализации алгоритма двоичного базисного сплайна 2-й степени. Синим цветом изображена исходная окружность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены некоторые способы для восстановления недостатка данных, а именно для построения кривых. Для достижения данной цели был изучен итерационный алгоритм Чайкина. В связи с его недостаточностью, был применен более эффективный алгоритм, называемый двоичным базисным сплайном 2-ой степени.