

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского»

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

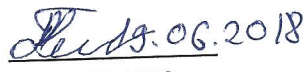
**Геометрически нерегулярная пластинка под
действием периодической, по временной координате, нормальной
нагрузки**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 431 группы
направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование
механико-математического факультета

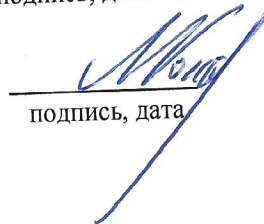
Дивейкина Ивана Васильевича

Научный руководитель
д.т.н., профессор


подпись, дата

Г.Н.Белосточный

Зав. кафедрой
профессор д. ф.- м. н., профессор


подпись, дата

Л. Ю.Коссович

Саратов 2018

Введение

Данная работа посвящена решению динамической задачи для пластинки подкреплённой рёбрами жёсткости под действием периодической во времени возмущающей нагрузки. Определяется влияние подкрепляющих элементов и геометрических характеристик пластинки на частотно-амплитудные характеристики упругой системы. Все положения, принятые в данной работе, основаны на гипотезах теории тонких пластин в рамках континуальной модели [1].

Пластина - тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми, называемое толщиной пластины, мало по сравнению с его другими размерами. Ребром жёсткости называется элемент конструкции в виде прямоугольной балки прикреплённой к поверхности пластины.

Пластинки, подкреплённые ребрами жёсткости частично или полностью перекрывающими план, представляют собой обширный класс геометрически нерегулярных пластин. Существуют различные математические модели для количественного и качественного анализа упругого поведения таких конструкций под действием различных силовых нагрузок предусмотренных условиями эксплуатации. Наиболее распространёнными моделями являются дискретные и континуальные модели. Континуальных моделей две: конструктивно анизотропная модель - модули упругости зависят от геометрических характеристик конструкции и её подкрепляющих элементов (относительная высота подкрепляющих элементов, их ширина, расстояние между ними), второй подход предполагает рассматривать подкреплённые системы как тонкостенные конструкции переменной толщины, в этом случае за основу берётся математическая аппарат теории обобщённых функций [2, 3].

В основе теории тонких пластин лежат предположения: нормаль недеформированной плоскости остаётся нормалью к деформированной поверхности и своей длиной не меняет.

Объектом исследования является прямоугольная геометрически нерегулярная пластинка, подкреплённая ребрами жёсткости полностью перекрывающие план. Рёбра жёсткости располагаются параллельно одной из сторон пластины. Пластинка находится под действием периодической во времени нормальной нагрузки заданной интенсивности.

Актуальность работы состоит в том, что пластинки, подкреплённые ребрами жёсткости, находят широкое применение в различных областях современной техники. Прежде всего в авиастроении, специальном судостроении, электронном машиностроении. Рёбра жёсткости значительно увеличивают прочность, при этом не существенно увеличивается расход материала и вес конструкции.

Целью настоящей работы является определение влияния геометрических параметров пластины на её частотно-амплитудные характеристики под действием периодической по временной координате нагрузки. Сформулируем задачи для достижения цели:

- вывести уравнение движения для прямоугольной пластинки, подкреплённой рёбрами жёсткости полностью перекрывающие её план из вариационного принципа Гамильтона на основе континуальной модели;
- подобрать базовую систему функций, удовлетворяющую краевым условиям шарнирного опирания;
- определить собственную и резонансную частоту, а так же функцию прогиба пластинки;
- определить влияние геометрических характеристик ребристой пластинки на частоту собственных колебаний пластинки;
- построить изображения иллюстрирующее влияние геометрических характеристик пластики на её собственную частоту и на амплитуду прогиба.

Структура и объём работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, 6 глав, заключения и списка использованных источников, состоящего из 20 именованных. Работа изложена на 40 листах машинописного текста без приложений, содержит 9 рисунков и 3 таблицы.

Основное содержание работы

Во введении описывают основные математические модели конструкций на основании которых возможен упругий анализ поведения пластины: дискретная модель и континуальная модель. Кратко описываются две континуальные модели и их основные предположения. Так же описываются основные гипотезы теории ребристых пластин.

Аргументируется актуальность работы. Ставится основная задача - определение влияния геометрических параметров пластины на её частотно-амплитудные

характеристики под действием периодической по временной координате нагрузки. Формулируются задачи.

В первой главе рассматриваются общие положения теории пластин. Записываются выражения связывающие деформации, напряжения и перемещения срединной поверхности пластины в предположение что главные кривизны пластины и температурные коэффициенты равны нулю.

Во второй главе рассматривается тонкая ребристая пластина, подкреплённая любым количеством рёбер жёсткости. Записывается интегральный вариационный принцип Гамильтона:

$$\delta\Gamma = 0. \quad (1)$$

Определяется функция Гамильтона через функцию Лагранжа L. Функция Лагранжа представляет собой сумму кинетической энергии T и силовой функции I. В итоге получается выражение для функции Гамильтона:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma = & \frac{\gamma}{2g} \int_{-z^*}^{z^*} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial \bar{u}^z}{\partial t}, \frac{\partial \bar{u}^z}{\partial t} \right) dx dy dz + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-z^*}^{z^*} \int_0^a \int_0^b (e_x \sigma_x + e_y \sigma_y + e_{xy} \tau_{xy}) dx dy dz, \end{aligned} \quad (2)$$

Определяется векторная функция основных поверхностей пластины. Определяется функция $z^*(x, y)$ из рассмотрения изменения толщины пластины в месте крепления ребра.

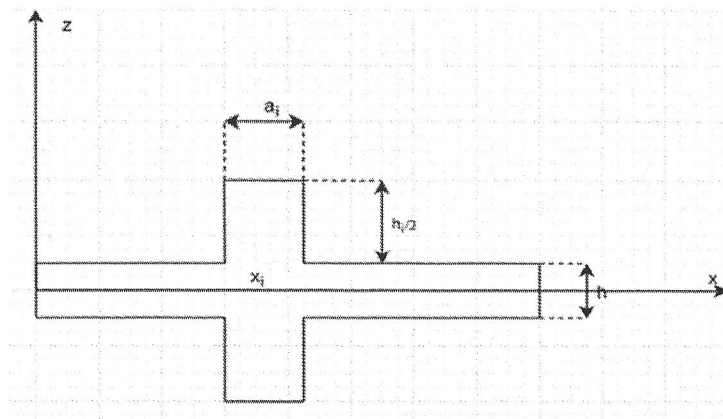


Рисунок 1 – Подкрепляющее ребро.

В (2) подставляются выражения напряжений и деформаций [4]. Интегрируется по толщине пластины, упрощается и записывается функция Гамильтона через перемещения:

$$\begin{aligned}
\Gamma = & \frac{\gamma}{2g} \int_{-z^*}^{z^*} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz + \\
& + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{-z^*}^{z^*} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \times \\
& \times dx dy dz + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{-z^*}^{z^*} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \right. \right. \\
& \left. \left. - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{-z^*}^{z^*} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy dz,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\Phi_{3i} = 1 + 3 \frac{h}{h_i} + 3 \left(\frac{h}{h_i} \right)^2.$$

Далее находятся частный вариации. Упрощаются и разделяются интегралы дающие граничные, начальные условия и интегралы которые пойдут в уравнения. Выделяя коэффициенты при δu , δv , δw и учитывая соответствующие нагрузки, получается система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \varphi_i \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \left(\frac{1+\nu}{2} + \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \varphi_i \right) + \\
& + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(1 + \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \varphi_i \right) - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left(1 + \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \varphi_i \right) = \frac{q_x}{B}, \\
& \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \varphi_i \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \left(\frac{1+\nu}{2} + \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \varphi_i \right) + \\
& + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left(1 + \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \varphi_i \right) - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \left(1 + \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \varphi_i \right) = \frac{q_y}{B},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\gamma h_i}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \varphi_i + \frac{\gamma h^3}{12g} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \varphi_i \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial y^2} \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \varphi_i \right] + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \varphi_i + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \varphi_i \right) \right] = \frac{q_z}{B},
\end{aligned} \tag{4}$$

В третьей главе формулируется краевая задача. Пренебрегая инерцией вращения и жёсткостью рёбер на кручение получаем дифференциальное уравнение в функции прогиба [6]:

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta(x - x_i) + \frac{\gamma h}{gD} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma h_i a_i}{gD} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta(x - x_i) = \frac{q_n(t)}{D}, \tag{5}$$

где n - число рёбр;

Задаются краевые условия шарнирного опирания:

$$\begin{aligned}
x = 0, \quad x = a: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\
y = 0, \quad y = b: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Предполагается, что пластины в начальный момент времени находилась в покое. Записываются начальные условия:

$$t = 0: \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

В четвёртой главе описывается основная идея метода Галёркина [7]. Основная идея метода состоит в подборе системы функций, где каждая функция ортогональна к любой функции этой системы кроме себя. Таким образом уравнение сводится к системе уравнений относительно коэффициентов ряда.

Пятая глава состоит из двух параграфов. В первом параграфе разыскиваются собственные частоты колебания пластинки в общем виде. Записывается вид решения:

$$w(x, y, t) = \sum_{k,m} w_{km}(t) \sin \left(\frac{k\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right).$$

Производится подстановка вида решения в дифференциальное уравнение (5). Производятся предварительные преобразования. Следуя методу Галёркина умножаем получившееся уравнение на ортогональную функцию $\sin\left(\frac{\pi j x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right)$ и интегрируем в указанных пределах. Получаем уравнение относительно коэффициентов:

$$\begin{aligned}
& w_{km} \frac{a b}{2 2} \left[\left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i w_{km} \frac{b}{2} \left(\frac{m\pi}{b} \right)^4 \sin^2 \left(\frac{\pi x_i}{a} \right) + \\
& + \frac{\gamma h}{gD} \frac{d^2 w_{km}}{dt^2} \frac{a b}{2 2} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\gamma h_i}{gD} \frac{d^2 w_{km}}{dt^2} \frac{b}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi x_i}{a} \right) = \\
& = \begin{cases} 0, & k \text{ или } m = 2, 4, \dots \\ \frac{q_n(t)}{D} \frac{2a}{k\pi} \frac{2b}{m\pi} & k, m = 1, 3, \dots \end{cases} \\
& \frac{d^2 w_{km}}{dt^2} + \frac{\left[1 + \left(\frac{bk}{am} \right)^2 \right]^2 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{a}{a_i} \frac{h_i}{h} \left(3 + 3 \frac{h_i}{h} + \left(\frac{h_i}{h} \right)^2 \right) \sin^2 \left(\frac{k\pi x_i}{a} \right)}{1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{a}{a_i} \frac{h_i}{h} \sin^2 \left(\frac{k\pi x_i}{a} \right)} \times \\
& \times \frac{gD}{\gamma h} \left(\frac{m\pi}{b} \right)^4 w_{km} = \begin{cases} 0, \\ \frac{16gq\sin(st)}{\gamma k m \pi^2 h \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{a}{a_i} \frac{h_i}{h} \sin^2 \left(\frac{k\pi x_i}{a} \right) \right]} \end{cases}
\end{aligned} \tag{8}$$

Вводятся обозначения для собственной частоты ω^2 :

$$\begin{aligned}
\omega_{km}^2 &= \frac{\left[1 + \left(\frac{bk}{am} \right)^2 \right]^2 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{a}{a_i} \frac{h_i}{h} \left(3 + 3 \frac{h_i}{h} + \left(\frac{h_i}{h} \right)^2 \right) \sin^2 \left(\frac{k\pi x_i}{a} \right)}{1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{a}{a_i} \frac{h_i}{h} \sin^2 \left(\frac{k\pi x_i}{a} \right)} \times \\
& \times \frac{gD}{\gamma h} \left(\frac{m\pi}{b} \right)^4,
\end{aligned}$$

Далее рассматривается случай, когда $k, m = 1, 3, 5, \dots$

Во втором параграфе определяются прогибы из обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 w_{km}}{dt^2} + \omega_{km}^2 w_{km} = \frac{16gq \sin(st)}{\gamma km \pi^2 h \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{a}{a_i} \frac{h_i}{h} \sin^2 \left(\frac{k \pi x_i}{a} \right) \right]},$$

$$w_{km} = A_{km} \sin(\omega_{km}^2 t + \alpha_{km}) + \frac{16gq \sin(st)}{\gamma km \pi^2 h \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{a}{a_i} \frac{h_i}{h} \sin^2 \left(\frac{k \pi x_i}{a} \right) \right] (\omega_{km}^2 - s^2)},$$

а в случае приближения частоты внешней нагрузки к собственной частоте возникает резонанс и решение принимает вид:

$$w_{km} \Big|_{s \rightarrow \omega_{km}} = A_{km} \sin(\omega_{km} t + \alpha_{km}) - 8 \frac{qgD \cos(st)t}{s \gamma h \pi^2 km \left(1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a} \frac{h_i}{h} \sin^2 \left(\frac{\pi x_i}{a} \right) \right)}. \quad (9)$$

С помощью начальных условий определяются постоянные интегрирования, и записываются окончательные решения:

$$w_{km} = 16 \frac{qgD \left(\sin(st) - \sin(\omega_{km} t) \frac{s}{\omega_{km}} \right)}{(\omega_{km}^2 - s^2) \gamma h \pi^2 km \left(1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a} \frac{h_i}{h} \sin^2 \left(\frac{\pi x_i}{a} \right) \right)}. \quad (10)$$

$$w_{km} \Big|_{s \rightarrow \omega_{km}} = \frac{8qgD \left(\frac{\sin(\omega_{km} t)}{\omega_{km}} - \cos(st)t \right)}{s \gamma h \pi^2 km \left(1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a} \frac{h_i}{h} \sin^2 \left(\frac{\pi x_i}{a} \right) \right)}. \quad (11)$$

Шестая глава состоит из двух параграфов. В первом параграфе производится анализ влияния геометрических характеристик ребристой пластины на собственную частоту. Исследуется безразмерная частота. Будем изучать влияние геометрических характеристик пластины на безразмерную частоту.

$$\sigma_{km}^2 = \frac{\left[k^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 m^2 \right]^2 + 2m^4 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \sum_{i=1}^n \frac{a_i h_i}{a h} \left(3 + 3 \frac{h_i}{h} + \left(\frac{h_i}{h} \right)^2 \right) \sin^2 \left(\frac{\pi x_i}{a} \right)}{1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{a_i h_i}{a h} \sin^2 \left(\frac{\pi x_i}{a} \right)} \quad (12)$$

Будет исследоваться первое приближение, то есть при $k = m = 1$. На основании сжатого ребра можно положить $\frac{a_i}{a} = \frac{1}{100}$. Тогда выражение для частоты запишется в виде:

$$\sigma_{11}^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 + 0,02 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} \left(3 + 3 \frac{h_i}{h} + \left(\frac{h_i}{h} \right)^2 \right) \sin^2 \left(\frac{\pi x_i}{a} \right)}{1 + 0,02 \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} \sin^2 \left(\frac{\pi x_i}{a} \right)} \quad (13)$$

Для исследования зависимости безразмерной частоты от геометрических параметров пластины фиксируются все параметры кроме исследуемого.

Исследуется зависимость собственной частоты колебаний от отношения сторон пластины. Фиксируются не исследуемые параметры. Получается зависимость: при увеличении отношения сторон пластины резко возрастает и собственная частота.

Далее исследуется зависимость собственной частоты от относительной высоты ребра. Аналогично фиксируются параметры. Получается зависимость: при увеличении относительной высоты ребра возрастает и собственная частота колебаний.

Исследуется зависимость от положения ребра - максимальная собственная частота достигается при расположении ребра в центре пластины.

Исследуется зависимость собственной частоты от количества рёбер жёсткости - при увеличении количества рёбер увеличивается и собственная частота.

Во втором параграфе изучается влияние геометрических параметров пластины на амплитуду колебания. Получается зависимость амплитуды прогиба от количества рёбер жёсткости. При увеличении рёбер жёсткости, падает амплитуда колебания. Графически показывается влияние частоты воз-

мущающей нагрузки на размах колебаний.

Заключене

Изучены основные гипотезы теории ребристых пластин подкреплённых рёбрами жёсткости полностью перекрывающими план на основе континуальной модели. Из вариационного принципа Гамильтона выведено уравнение движения тонкой ребристой пластинки. Сформулирована и решена методом Галёркина краевая задача. Определена собственная частота колебаний и функция прогиба.

На основе полученных решений обнаружена общая закономерность влияния подкрепляющих элементов на частотно-амплитудные характеристики пластинки, которые согласуются с исследованиями других авторов.

1. С увеличением отношения сторон $\left(\frac{a}{b}\right)$ существенно увеличивается частота собственных колебаний.
2. Увеличение относительной высоты рёбер $\left(\frac{h_i}{h}\right)$ ведёт к существенному увеличению частоты собственных колебаний пластины.
3. Существенно влияет расположение и количество рёбер жёсткости. Чем ближе рёбра жёсткости к центру пластины, тем сильнее увеличивается частота собственных колебаний, и уменьшается размах колебаний. С увеличением рёбер жёсткости возрастает собственная частота и падает размах колебаний.
4. При приближение частоты внешней нагрузки к собственной частоте колебаний резко возрастает амплитуда колебаний.

С помощью параметров $\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{h_i}{h}\right)$, $\left(\frac{x_i}{a}\right)$ и n регулируется частота собственных колебаний, тем самым избегается эффект резонанса.

Список используемых источников

1. Пелех, Б. Л. Обобщенная теория оболочек: учеб. пособие/Б.Л. Пелех. Л.: Вища школа, 1978. 159с.
2. Черных, К. Ф. Линейная теория оболочек. В 2 ч. Ч. 2./ К.Ф. Черных. Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. 395 с.
3. Власов, В. З. Общая теория оболочек/ В. З. Власов. М.: Гостехиздат, 1949. 786 с.
4. Лейбензон, Л. С. Курс теории упругости/ Л. С. Лейбензон. М.: Гостехиздат, 1947. 454 с.
5. Белосточный, Г. Н., Геометрически нерегулярные пластинки под дей-

ствием быстропеременных по временной координате силовых и температурных воздействий/ Г. Н. Белосточный, О. А. Мыльцина.// Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. 2015. Т. 15: Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С. 442-451.

6. Канторович, Л. В., Приближённые методы высшего анализа/ Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

19.06.2018

