

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского»

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

**ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ
ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН
В ТОНКОМ ВЯЗКОУПРУГОМ СТЕРЖНЕ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 431 группы
направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование
механико-математического факультета
Синельниковой Светланы Геннадьевны

Научный руководитель
доцент, к. ф.- м. н., доцент

Анофрикова 19.06.18 Н. С. Анофрикова

Зав. кафедрой
профессор д. ф.- м. н., профессор

Коссович Л. Ю. Коссович

Саратов 2018

Введение

Бакалаврская работа посвящена исследованиям, лежащим в области линейной теории вязкоупругости, и касается изучения распространения нестационарных волн в тонких стержнях.

Рассмотренный случай представляет интерес, так как одномерная задача наиболее проста, и для неё часто может быть получено точное решение, которое впоследствии можно использовать для верификации различных приближённых, в том числе асимптотических, методов исследования.

Асимптотические методы являются необходимым инструментом при исследовании различных предельных ситуаций, в которых, как правило, не работают численные методы. Первые позволяют прояснить качественные свойства искомого решения, как в частных, так и в общем случае.

Тема является актуальной, так как многие задачи не позволяют найти точного решения. Но, применяя различные асимптотические методы, можно получить удовлетворительное для практики приближенное решение задачи.

Целью бакалаврской работы является исследование применимости различных асимптотических методов к решению задач о распространении нестационарных волн в тонком полубесконечном вязкоупругом стержне при воздействии на его торец ударной продольной нагрузки.

Задачами выполняемой работы являются:

1) построение математической модели, описывающей распространение продольной волны в тонком вязкоупругом полубесконечном стержне, выполненном из материала, свойства которого описываются моделью Максвелла в случае, когда стержень подвержен ударной продольной нагрузке на его торец;

2) получение точного решения поставленной задачи;

3) построение асимптотик для случаев предельных значений параметра интегрального преобразования;

4) сращивание асимптотических разложений с помощью метода асимптотически эквивалентных функций;

5) анализ полученных решений.

Структура и объём работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 2 глав, заключения и списка используемых источников, включающего 23 наименования. Работа изложена на 40 листах машинописного текста без приложений, содержит 13 рисунков.

Основное содержание работы. Во введении описывается актуальность поставленной задачи, обзор методов, используемых при исследовании процесса распространения нестационарных волн в вязкоупругих элементах конструкций, история исследований в области описания таких процессов, формулируется цель работы и ставятся задачи.

Первая глава состоит из трёх разделов. Она посвящена постановке задачи о распространении нестационарных волн в тонком вязкоупругом полубесконечном стержне при ударном продольном воздействии на его торец и нахождению её точного решения.

Математическая модель включает одномерное уравнение движения, уравнение состояния и соотношение, связывающее деформацию и перемещение. Уравнение состояния берётся в дифференциальной форме, в качестве модели вязкоупругого материала выбрана модель Максвелла [1].

К системе уравнений добавляются начальные и граничные условия, соответствующие поставленной задаче.

От системы трёх уравнений, содержащих три неизвестные функции: напряжение, деформации и перемещения, осуществляется переход к одному уравнению относительно одной неизвестной функции – напряжения.

Вводятся безразмерные переменные, безразмерная функция напряжения и безразмерный параметр вязкоупругости. Это позволяет получить более простой вид определяющего уравнения.

Для решения поставленной задачи используется метод интегрального преобразования Лапласа по переменной времени [2], описание которого приводится во втором разделе первой главы. Он позволяет перейти от уравнения второго порядка в частных производных к линейному

обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решение задачи в изображениях представляет собой линейную комбинацию экспонент, показатели степени которых отличаются лишь знаком, и содержит две константы. Так как задача поставлена для полубесконечного стержня, то отражённые волны не рассматриваются, и одна из констант полагается равной нулю. Вторая константа определяется из граничного условия, записанного в изображениях.

Данная задача позволяет найти точное аналитическое решение с помощью метода контурного интегрирования [3]. Построению точного решения посвящён третий раздел первой главы.

Графики для приведённых значений напряжения $\frac{\sigma^*}{I^*}$, построенные для фиксированного безразмерного времени τ при различных значениях параметра вязкоупругости n^* позволили сделать выводы о влиянии последнего на характер решения: для чем меньше n^* , тем быстрее убывает напряжение, чем больше n^* , тем оно медленнее убывает, и закон стремится к упругому линейному случаю.

С помощью графиков для приведённых значений напряжения $\frac{\sigma^*}{I^*}$, построенных для фиксированного значения n^* , при различных значениях τ можно сделать следующие выводы о поведении решения с течением времени: в начальный момент времени решение убывает по линейному закону, с ростом времени волна быстро затухает.

В более сложных случаях нахождение точных формул для решений задач становится непростым, а иногда и невозможным. Тогда используются различные приближённые методы исследования [4], которые позволяют найти удовлетворительные с точки зрения практики решения. А полученное в данном случае точное решение можно использовать для верификации решений, полученных различными приближёнными методами исследования.

Во второй главе исследуется применение асимптотических методов к изучению решения подобных задач. Одним из наиболее используемых асимптотических методов является разложение решения по степеням параметра интегрального преобразования. Согласно этому методу полученное ранее решение задачи в изображениях нужно разложить по положительным и отрицательным степеням параметра преобразования Лапласа.

В первом разделе второй главы получены асимптотические разложения изображения точного решения по положительным степеням параметра интегрального преобразования s и найдены две асимптотики решения для малых значений параметра преобразования: с сохранением в показателе степени экспоненты слагаемого порядка ϵ^{-1} (первая асимптотика), с полным разложением экспоненты в ряд (вторая асимптотика).

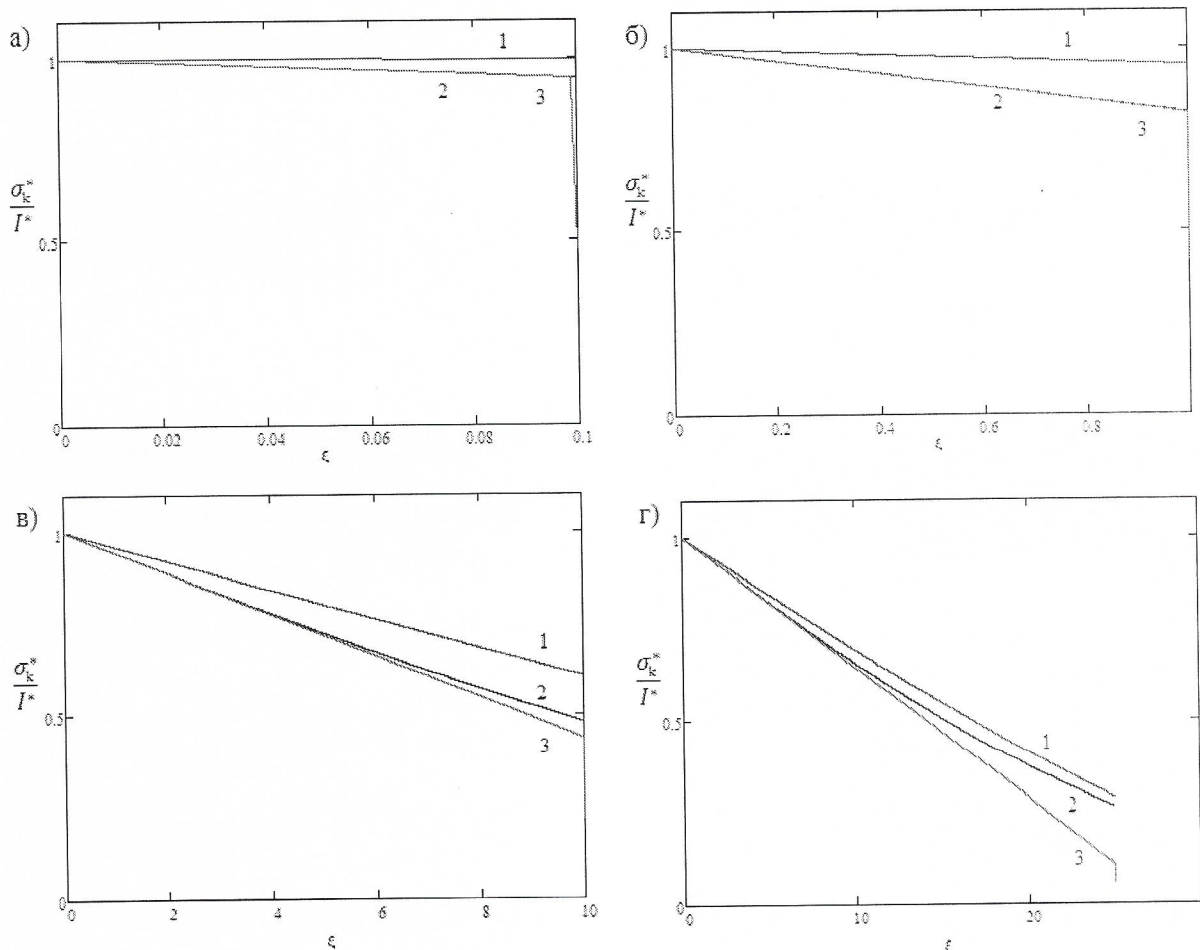


Рисунок 1 – Зависимость приведённых значений напряжений — относительно координаты ξ при $\tau = 10$ и $\tau = 0.1$ (а), $\tau = 1$ (б), $\tau = 10$ (в), $\tau = 25$ (г).

Сравнивая полученные асимптотики для различных значений времени с точным решением задачи (рисунок 1: точное решение – кривая 1, первая асимптотика – кривая 2, вторая асимптотика – кривая 3), можно сделать вывод о том, что асимптотики не работают в начальный момент времени, но хорошо приближают точное решение для больших значений времени. Причём асимптотика, полученная способом с сохранением \sqrt{s} в показателе степени экспоненты, лучше приближает точное решение. Поэтому при дальнейших исследованиях будет использоваться именно эта асимптотика.

Во втором разделе второй главы получены асимптотические разложения по отрицательным степеням параметра s и найдены асимптотические решения для больших значений параметра преобразования двумя способами: с помощью полного разложения экспоненциального множителя, содержащего в показателе степени слагаемые с отрицательными степенями параметра интегрального преобразования Лапласа (первая асимптотика); оставляя в показателе степени экспоненты слагаемое порядка s^{-1} - модифицированный метод прифронтной асимптотики [5] (вторая асимптотика).

Из сравнения полученных асимптотик для малых значений времени с точным решением задачи (рисунок 2), где точное решение – кривая 1, первая асимптотика – кривая 2, вторая асимптотика – кривая 3, следует вывод, что асимптотики совпадают с точным решением в начальный момент времени, а с увеличением времени они приближают точное решение только в окрестности фронта волны. Причём асимптотики, полученные разными способами, дают одинаковое приближение, поэтому при дальнейших исследованиях может использоваться любая из них.

Как было показано, асимптотики, полученные для предельных значений параметра интегрального преобразования применимы не во все моменты времени, а только при больших и малых значениях времени.

Построение единого решения по предельным асимптотикам непростая, но актуальная задача. Существуют различные методы, позволяющие на основе предельных асимптотик получить единое аналитическое решение.

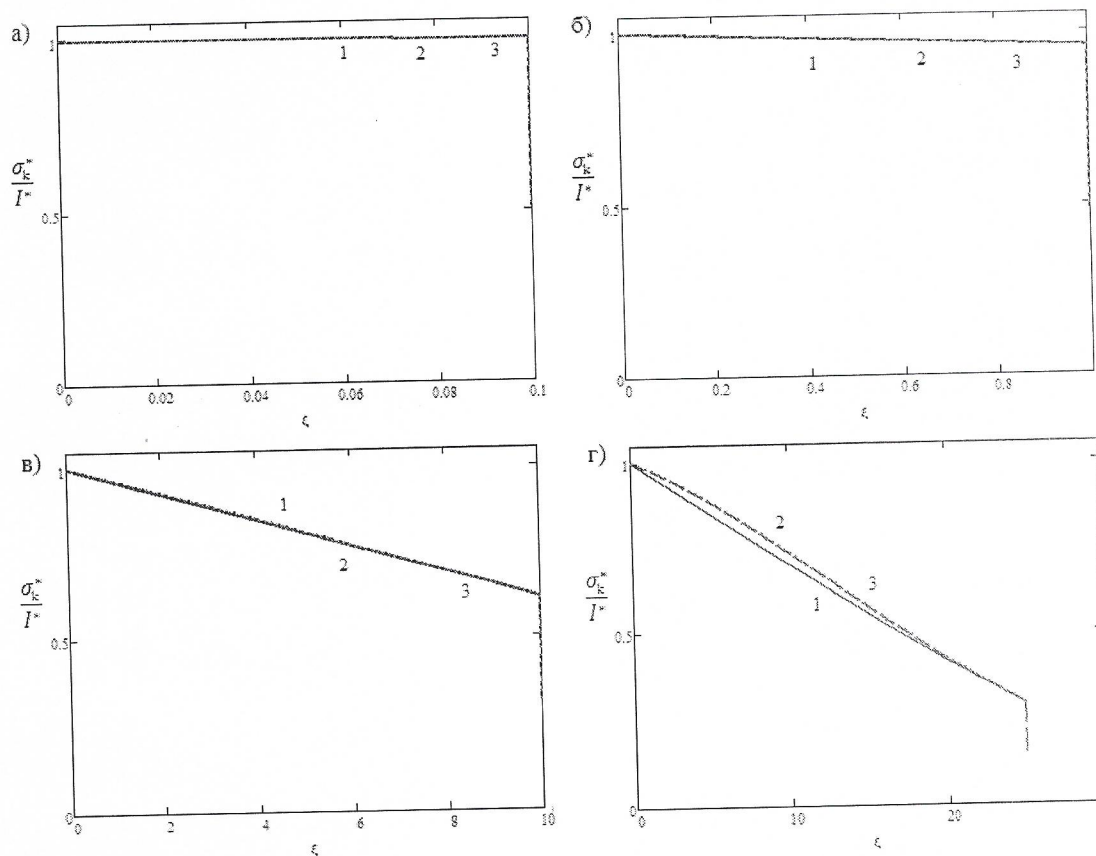


Рисунок 2 – Зависимость приведённых значений напряжений — относительно координаты при $\nu = 10$ и $\tau = 0.1$ (а), $\tau = 1$ (б), $\tau = 10$ (в), $\tau = 25$ (г).

Третий раздел второй главы посвящён построению решения методом асимптотически эквивалентных функций [6].

Он заключается в том, что точное изображение (s) заменяется приближённой функцией (s) , допускающей переход к оригиналам и отвечающей условиям:

- функции (s) и (s) асимптотически эквивалентны при стремлении параметра s 0 и к бесконечности;
- особые точки (s) и (s) на точной границе области регулярности совпадают;

- производные функций $\bar{f}_0(s)$ и $\bar{f}(s)$ асимптотически эквивалентны при стремлении параметра s к 0.

При построении асимптотически эквивалентной функции $\bar{f}_0(s)$ задаются произвольные коэффициенты, которые определяются из выше сформулированных условий.

В результате применения данного метода, а также использования таблиц интегрального преобразования [7] и теоремы запаздывания [8] было найдено выражение для асимптотически эквивалентной функции:

$$\sigma_0(\xi, \tau) = I^* \left[1 - e^{\frac{\tau-\xi}{b_1^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\tau-\xi}}{b_1} \right) + e^{\frac{\xi}{2n^*}} e^{\frac{\tau-\xi}{b_1^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\tau-\xi}}{b_1} \right) \right],$$

где $b_1 = \frac{\xi}{\sqrt{n^*}} \frac{1-2n^*}{n^*} \frac{e^{\frac{\xi}{2n^*}}}{1-e^{\frac{\xi}{2n^*}}}$, ξ – безразмерная координата, I^* – амплитуда нагрузки.

Для выявления влияния параметра вязкоупругости n^* на точность приближения точного решения асимптотически эквивалентной функцией были построены графики этих функций при различных фиксированных значениях времени τ и различных значений параметра n^* , анализируя которые, можно заметить, что точность приближения увеличивается с ростом времени релаксации.

Сравнение всех полученных решений поставленной в данной работе задачи, представленное на рисунке 3 (а, б, в, г), позволяет сделать вывод, что асимптотически эквивалентная функция, представленная кривой 4, хорошо приближает точное решение задачи, кривая 1, для всех значений времени, в отличие от асимптотик решения для малых и больших значений параметра интегрального преобразования Лапласа (кривые 2 и 3, соответственно).

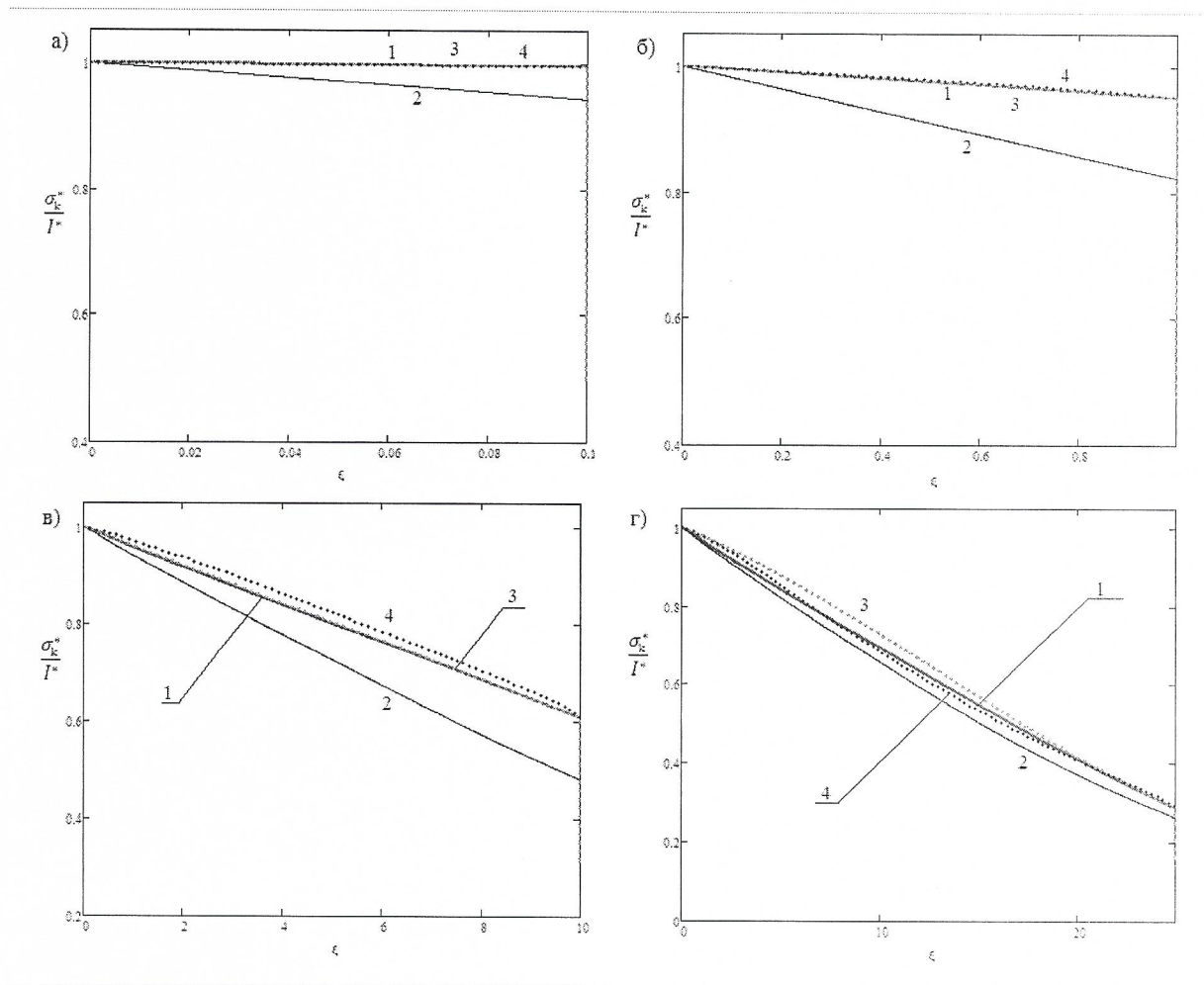


Рисунок 3 – Зависимость приведённых значений напряжений — относительно координаты при $\tau = 10$ и $\tau = 0.1$ (а), $\tau = 1$ (б), $\tau = 10$ (в), $\tau = 25$ (г).

Заключение. В процессе выполнения бакалаврской работы была поставлена задача о распространении одномерной продольной нестационарной волны в вязкоупругом тонком полубесконечном стержне, подверженном ударному продольному воздействию на его торец. Материал стержня описывался моделью Максвелла.

В качестве метода решения поставленной задачи был выбран метод интегрального преобразования Лапласа по переменной времени, найдено изображение точного решения.

При решении задач с помощью методов интегральных преобразований основная сложность заключается в нахождении оригинала решения по известному изображению. В рассматриваемом случае в связи с относительно

простым выражением для изображения решения удалось получить точное аналитическое решение задачи путем применения формулы Меллина и вычисления полученного интеграла с помощью метода контурного интегрирования. Данное решение впоследствии было использовано для выявления областей применимости различных приближенных решений, полученных асимптотическими методами.

На основании полученного точного решения были построены графики для приведенного значения напряжения относительно безразмерной продольной координаты, позволившие сделать выводы о влиянии параметра вязкоупругости на поведение решения, а также об изменении формы решения с течением времени.

Поскольку в случае более сложных с аналитической точки зрения выражений для изображения указанный точный метод обращения не применим, то в работе были исследованы приближенные асимптотические методы построения решения, основанные на разложении изображения в ряды по параметру интегрального преобразования Лапласа при стремлении последнего к нулю и бесконечности. Было получено по две асимптотики для каждого случая, из которых были выбраны оптимальные. Показано, что полученные асимптотики решения приближают точное не на всей области изменения переменной времени, а только при больших и малых значениях времени, соответственно.

Для построения решения, пригодного в различные моменты времени, был применен метод асимптотически эквивалентных функций, заключающийся в замене точного изображения асимптотически эквивалентным изображением, допускающим точное обращение.

Графики точного решения и решения, полученного с помощью метода асимптотически эквивалентных функций, были построены в одной системе координат для различных значений времени и различных значений параметра вязкоупругости. Анализ графиков позволил сделать вывод о том, что решение, полученное с помощью метода асимптотически эквивалентных функций,

достаточно хорошо приближает точное решение при любых значениях времени в отличие от решений, полученных разложением изображения в ряды по положительным и отрицательным степеням параметра интегрального преобразования Лапласа и последующего их почленного обращения.

Следует также отметить, что в рассматриваемом случае точность, с которой решение, полученное с помощью метода асимптотически эквивалентных функций, приближает точное решение, зависит от значения параметра вязкоупругости: увеличение параметра вязкоупругости влечет увеличение точности полученного приближенного решения.

По результатам исследований была подготовлена статья, принятая к печати в сборник «Математика. Механика» [9].

Список использованных источников

1. Кристенсен, Р. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен; пер. М. И. Рейтман; под ред. Г. С. Шапиро. М. : Мир, 1974. 340 с.
2. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч; пер. Вольперт. М. : Наука, 1971. 288 с.
3. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики : учеб. пособие для высших учебных заведений / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1977. 736 с.
4. Буханько А.А. Приближенные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и интегральных уравнений: учеб.-метод. пособие / А.А. Буханько, О.П. Чостковская. Самара: Изд-во Самар. гос. аэро-косм. ун-та, 2011. 68 с.
5. Шамровский, А.Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости/ А.Д. Шамровский. Запорожье: Изд-во Запорож. гос. инж. академии, 1997. 169 с.
6. Слепьян, Л.И. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики / Л.И. Слепьян, Ю.С. Яковлев; Л.: Судостроение, 1980. 344 с.

7. Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований. В 3 т. Т.1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина / Г. Бейтмен, А. Эрдейи; пер. Н. Я. Виленкина; ред. М.Я. Ворновицкого. М. : Наука, 1968. 344 с.

8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов : учеб. пособие для втузов: в 2 т./ Н.С. Пискунов. М. : Наука, 1985. 560 с.

9. Анофрикова Н.С. Применение метода асимптотически эквивалентных функций к решению задачи о распространении нестационарных волн в вязкоупругих стержнях / Н.С.Анофрикова, С.Г.Синельникова // Математика. Механика : сб. науч. тр. - Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2018. Вып.20. (принята к печати)



19.06.18