

Министерство образования и науки Российской Федерации ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Бистабильность в системе с линией равновесия, содержащей
мемристор.**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ..

студента 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 «Радиофизика»
физического факультета

Васюнина Никиты Владимировича

Научный руководитель

Ассистент кафедры радиофизики

и нелинейной динамики, к.ф.-м.н.

В.В.Семенов

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

В.С.Анищенко

Саратов 2018

Введение.

Известны три базовых пассивных элемента электрических цепей: резистор, конденсатор и катушка индуктивности. В 1971 году Леоном Чуа была предложена идея существования четвертого базового элемента под названием «мемристор». Чуа предложил модель мемристора, в котором магнитный поток $\varphi(t)$ нелинейно связан с протекающим через него зарядом $q(t)$: $d\varphi = M dq$, откуда следует, что $M(q) = \frac{d\varphi}{dq}$. С помощью выражений $d\varphi = Udt$, $dq = idt$ (U -падение напряжения на мемристоре, i - ток, протекающий через мемристор), можно получить: $U = M(q)i$, откуда следует, что M является сопротивлением мемристора. Сопротивление мемристора управляется зарядом и связано со значениями тока, протекавшего через двухполюсник в предыдущие моменты времени:

$$M(q) = \frac{d\varphi}{dq} = \varphi' \left(\int_{-\infty}^t i(t) dt \right) \quad (1)$$

Аналогично можно записать $dq = Wd\varphi$, следовательно, $W(\varphi) = \frac{dq}{d\varphi}$ и $i = W(\varphi)U$.

Таким образом, W является управляемой магнитным потоком проводимостью и определяется предшествующими значениями напряжения:

$$W(\varphi) = \frac{dq}{d\varphi} = q' = \left(\int_{-\infty}^t U(t) dt \right) \quad (2)$$

Формула (1) и (2) описывают мемристор, управляемый зарядом и магнитным потоком соответственно. Обе эти записи эквивалентны и выбор функции определяется из условий конкретной задачи.

Целью выпускной квалификационной работы является исследование математической модели электронного устройства, реализующего диссипативный осциллятор Дуффинга с двухъямным потенциалом и

сравнение поведения классической модели осциллятора с конечным трением и модифицированной модели, содержащей мемристор. Решается задача выявления отличительных свойств осциллятора, к которым приводит добавление мемристора. Данная работа состоит из трех глав.

1. Осциллятор Дуффинга с конечным трением. Данная глава широко рассматривается в ВКР.

2. Модифицированная схема электронной модели осциллятора Дуффинга с дополнительным резистором.

2.1 Вывод уравнений электронной модели осциллятора с дополнительным резистором.

2.2 Анализ состояний равновесия уравнений.

3. Модифицированная схема электронной модели осциллятора Дуффинга с мемристором.

3.1 Вывод уравнений электронной модели осциллятора с дополнительным мемристором.

3.2 Анализ состояний равновесия системы.

3.3 Численный эксперимент.

Основное содержание работы.

Осциллятор Дуффинга с конечным трением.

Уравнение осциллятора Дуффинга с конечным трением имеет вид:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x^3 - ax = 0, \quad (3)$$

где предполагается присутствие диссипации, определяемой параметром γ .

Потенциал $U(x)$ имеет одноямную конфигурацию при $a < 0$ и двухъямную при $a > 0$.

Система (3) может быть представлена как система двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y + ax - x^3. \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) демонстрирует бифуркацию типа вил при вариации параметра a . При $a < 0$ в фазовом пространстве системы (4) существует единственное состояние равновесия с координатами $x=y=0$. Данное состояние равновесия является устойчивым при $a < 0$. С увеличением параметра a , при $a = 0$ происходит бифуркация вил. Устойчивая до бифуркации неподвижная точка в начале координат становится седловой, и в ее окрестности рождаются две устойчивые неподвижные точки с координатами $x = \pm\sqrt{a}, y = 0$. Данной бифуркации отвечает переход от режима моностабильности к режиму бистабильности. Данный раздел более подробно рассматривается в ВКР.

Модифицированная схема электронной модели осциллятора Дуффинга резистором. Данный раздел рассматривается в ВКР.

Модифицированная схема электронной модели осциллятора Дуффинга с мемристором.

Вывод уравнений электронной модели осциллятора с мемристором.

Рассмотрим схему с нелинейным преобразователем (F), изображенную на рис.1. Данная схема представляет собой последовательный колебательный контур, содержащий управляемый магнитным потоком мемристор G_m , подключенный параллельно конденсатору C.

На рис.1 используются следующие обозначения: U - падение напряжения на конденсаторе C, i - ток, протекающий через катушку индуктивности L, G_m – мемристор, управляемый магнитным потоком φ .

Уравнения схемы, приведенной на рис.1, в физических переменных принимают вид:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + U(R - K_1) + K_3 U^3 = 0 \\ C \frac{dU}{dt} = i - G_m(\varphi)U \\ \frac{d\varphi}{dt} = U \end{cases} \quad (5)$$

В безразмерном виде уравнения системы (5) имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - G_M(z)x \\ \dot{y} = -\gamma y + ax - x^3 \\ \dot{z} = x \end{cases} \quad (6)$$

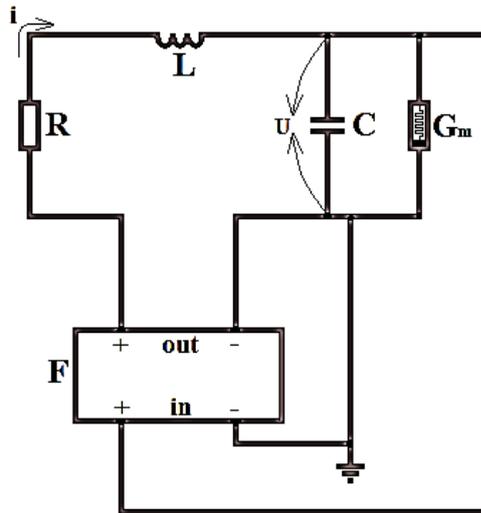


Рисунок 1. Схема модифицированной модели осциллятора Дуффинга с дополнительным мемристором

Будем описывать проводимость мемристора кусочно-гладкой характеристикой, предложенной Л. Чуа:

$$G_M(z) = \begin{cases} \alpha, & |z| \leq 1 \\ \beta, & |z| > 1, \end{cases} \quad (7)$$

Исследуем уравнения осциллятора с дополнительным мемристором (6) при данных значениях параметров.

Анализ состояний равновесия системы (6)

Найдем состояния равновесия для системы (6). Приравнивая производные нулям, получаем

$$x = y = 0, \quad z = const \quad (8)$$

Таким образом, система (6) имеет бесконечное число состояний равновесия, лежащих на оси OZ. Проекция всех равновесий на плоскости x,y дает одну

точку в начале координат. Таким образом, при добавлении в электронную схему осциллятора мемристора, бистабильность полностью исчезает.

Проанализируем точки равновесия, расположенные на оси OZ, на устойчивость. Составим матрицу Якоби для системы (6). Она имеет вид

$$\hat{J}(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix}_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \begin{pmatrix} -G_M(z) & 1 & 0 \\ a & -\gamma & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где f_1 , f_2 и f_3 – функции, задающие правые части уравнений. Собственные значения матрицы Якоби ρ_i , $i=1,2,3$, есть корни характеристического уравнения:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} -(G_M(z) + \lambda) & 1 & 0 \\ a - 3x^2 & -(\gamma + \lambda) & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (10)$$

Откуда, с учетом равенства $x = 0$, получаем следующее выражение:

$$\lambda(\lambda^2 + (G_m(z) + \gamma)\lambda + (G_m(z)\gamma - a)) = 0, \quad (11)$$

Исходя из решения уравнения (11) мы получаем первый корень

$$\lambda_1 = 0.$$

Нулевое собственное значение существует для всех точек равновесия на оси OZ и не зависит от параметров. Это означает, что при всех значениях параметров в системе (6) существует ось равновесий, совпадающая с координатной осью OZ. По направлению вдоль оси OZ не будет ни роста, ни уменьшения начального возмущения. Однако в других направлениях возмущение может расти или убывать в зависимости от параметров. Т.е.

точки на оси OZ, оставаясь точками равновесия, могут менять характер устойчивости. Будут ли они устойчивыми, определяется двумя другими корнями характеристического уравнения (11).

Для нахождения двух других корней решаем квадратное уравнение:

$$\lambda^2 + (G_m(z) + \gamma)\lambda + (G_m(z)\gamma - a) = 0 \quad , \quad (12)$$

Корни уравнения (12) есть

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-(\gamma + G_M(z)) \pm \sqrt{(\gamma + G_M(z))^2 + 4a - 4\gamma G_M(z)} \right]. \quad (13)$$

Оба корня будут отрицательными при $a < \gamma G_M(z)$ и будут иметь разные знаки при $a > \gamma G_M(z)$. Значение $a = \gamma G_M(z)$ является бифуркационным. Так как проводимость мемристора зависит от управляющей переменной z (магнитного потока), то бифуркация точек равновесия на оси OZ происходит не одновременно, а зависит от их расположения. С учетом характеристики мемристора (7) получаем следующее:

- Если $a < \gamma\alpha$, то вся ось OZ состоит из устойчивых точек равновесия типа «устойчивый узел»;
- При $\gamma\alpha < a < \gamma\beta$ точки в интервале $z \in [-1, +1]$ становятся неустойчивыми типа «седло», а точки с координатами $z < -1$ и $z > +1$ остаются устойчивыми узлами;
- При $a > \gamma\beta$ все точки на оси OZ становятся неустойчивыми (седлами).

Рассмотрим следующий пример. Положим $\gamma = 1$, $a = 1$, $\alpha = 0.02$, $\beta = 2$. Тогда, при $|z| > 1$ имеем $G_m(z) = 2$ и корни уравнения (12) в соответствии с выражением (13) будут:

$$\lambda_2 = -0.385,$$

$$\lambda_3 = -2.615.$$

Получаем, что точки на оси OZ в полуинтервалах $z < -1$ и $z > +1$ при выбранных значениях параметров являются устойчивыми типа «устойчивый узел».

При $G_m(z)=0.002$ корни (13) будут:

$$\lambda_2 = -1.645,$$

$$\lambda_3 = 0.625.$$

Точки на оси OZ в интервале $z \in [-1, +1]$ при выбранных значениях параметров являются неустойчивыми типа «седло». Расположение устойчивых и неустойчивых точек равновесия в фазовом пространстве системы (6) проиллюстрировано на рис.2.

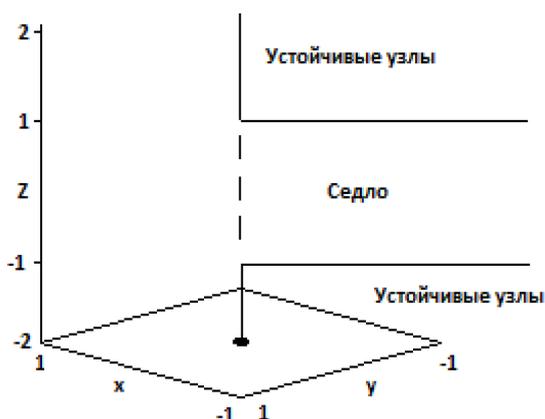


Рисунок 2. Расположение устойчивых и неустойчивых точек равновесия в фазовом пространстве системы (6) при $\gamma = 1$, $a = 1$, $\alpha = 0.02$, $\beta = 2$

Численный эксперимент

Для численного исследования осциллятора с дополнительным мемристором (6) использовалась программа ХРРАУТ. С помощью этой программы мы построили графики из системы уравнений (6).

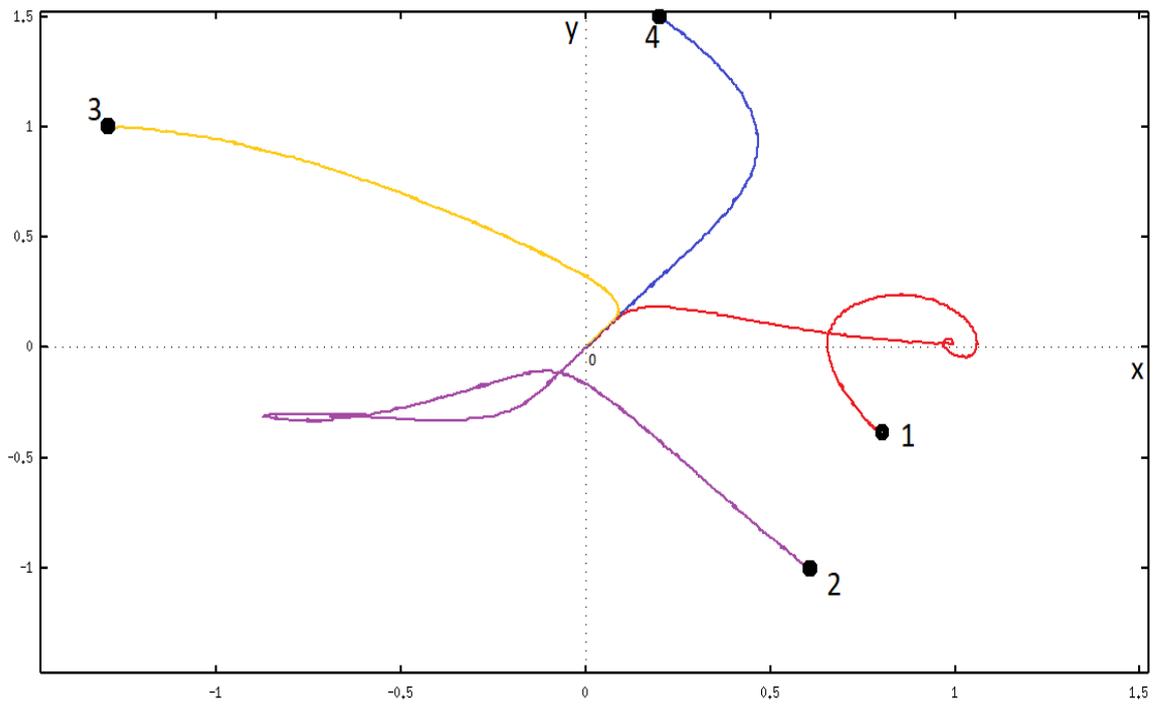


Рисунок 3. Проекция графиков полученных из системы уравнений (6) на плоскость XY с разными начальными условиями.

1. $X=0.8, Y=-0.4, Z=0.01$.

2. $X=0.6, Y=-1, Z=0.5$.

3. $X=-1.3, Y=1, Z=1$.

4. $X=0.2, Y=1.5, Z=1$.

На данном рисунке(3) мы наглядно видим, что траектория всех кривых сходится в одну точку $X=0, Y=0$.

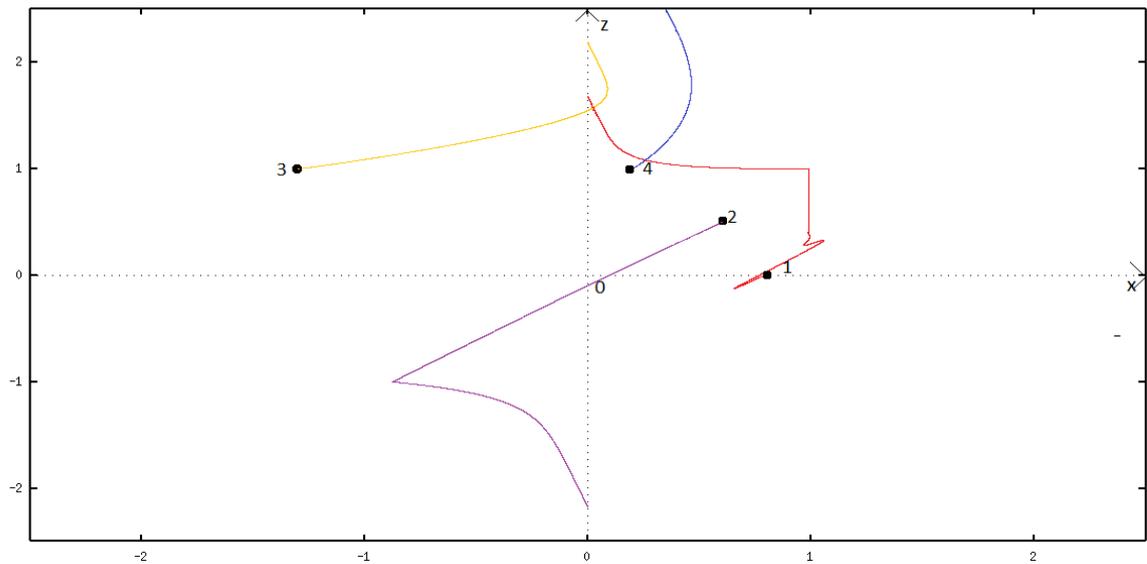


Рисунок 4. Проекция графиков полученных из системы уравнений (6) на плоскость XZ с разными начальными условиями.

1. $X=0.8, Y=-0.4, Z=0.01$.

2. $X=0.6, Y=-1, Z=0.5$.

3. $X=-1.3, Y=1, Z=1$.

4. $X=0.2, Y=1.5, Z=1$.

На рисунке (4) видно, что траектории стягиваются к следующим частям линии равновесия $z \in (-\infty; -1] [1; +\infty)$

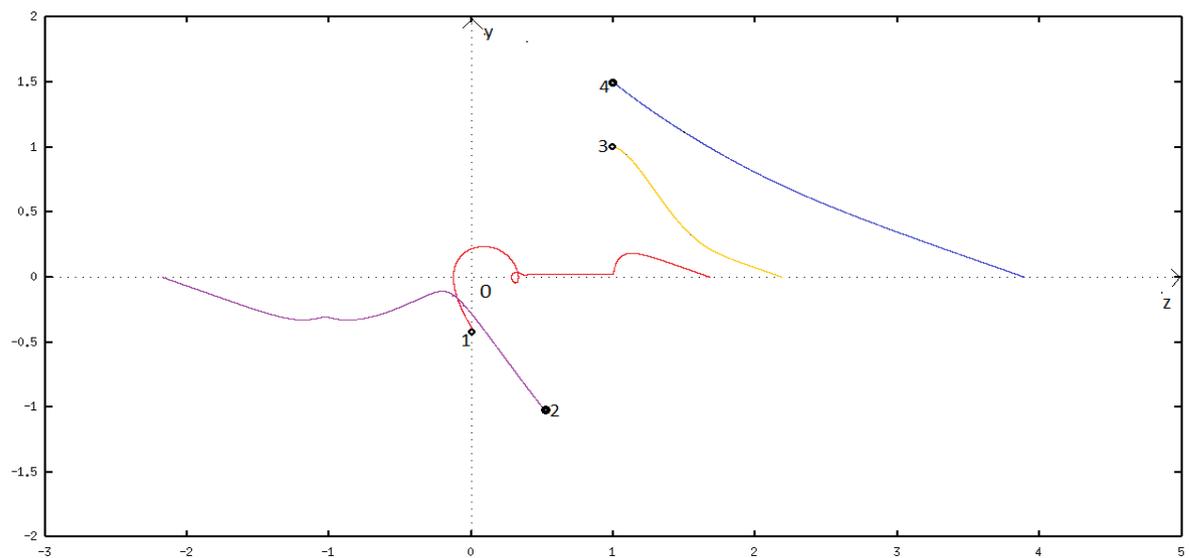


Рисунок 5. Проекция графиков полученных из системы уравнений (6) на плоскость YZ с разными начальными условиями.

1. $X=0.8, Y=-0.4, Z=0.01.$

2. $X=0.6, Y=-1, Z=0.5.$

3. $X=-1.3, Y=1, Z=1.$

4. $X=0.2, Y=1.5, Z=1.$

Приведенные численные результаты подтверждают теоретические выводы об исчезновении бистабильности и существовании оси равновесий OZ в системе (6).

Заключение

Электронная схема, моделирующая осциллятор Дуффинга с дополнительным резистором, подключенным параллельно конденсатору, также как классический осциллятор Дуффинга, демонстрирует существование двух аттракторов, а именно двух изолированных, устойчивых, неподвижных точек, бассейны притяжений которых разделяет сепаратриса седловой точки в начале координат. Таким образом, добавление дополнительного резистора не приводит к качественным изменениям динамики. Логично предположить, что добавление мемристора, как элемента с резистивными свойствами, также не приведет к качественным изменениям поведения исследуемой системы. Однако это не так. Полученные в рамках выпускной квалификационной работы результаты показали, что добавление мемристора в электронную модель осциллятора Дуффинга существенным образом меняет динамику системы. Добавление мемристора приводит к разрушению бистабильности, характерной для осциллятора Дуффинга с двухъямным потенциалом, и возникновению линии равновесий в фазовом пространстве исследуемой системы, совпадающей с координатной осью OZ.

Описанные изменения были выявлены средствами линейного анализа устойчивости состояний равновесия и подтверждены в численном эксперименте с использованием XPPAUT. Соответствие аналитических и

результатов численного моделирования свидетельствует об их достоверности.