

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

Быстрое преобразование Фурье в задаче сжатия изображений

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 219 группы

направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Бондаренко Глеба Александровича

Научный руководитель
доцент, к.ф-м.н., доцент

дата, подпись

Д.С. Лукомский

Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., профессор

дата, подпись

В.А. Юрко

Саратов, 2018 год

Введение На текущий момент информационном мире одной из самых актуальных и важных задач является сжатие цифровых изображений и видео в целях экономии средств на хранение и передачу информации. В современной компьютерной науке существует широкий спектр методов сжатия и обработки цифровой информации, с использованием дискретных преобразований на основе классических систем, однако более поздние работы предлагают абсолютно новые алгоритмы вычисления как прямого, так и обратного преобразования Фурье на локальных полях.

Целью данной работы является изучение аналитического аппарата и подходов к обработке изображений с использованием преобразований Фурье и попытка сопоставить классические дискретные преобразования с новым подходом к быстрому преобразованию Фурье по локальным полям.

Поставленной цели соответствуют следующие задачи:

- изучение ортогональных систем ступенчатых функций, в частности функций Хаара и Уолша
- изучение общей идеи преобразования Фурье и алгоритмов быстрого преобразования Фурье для решения задачи обработки изображений
- программная реализация алгоритма быстрого преобразования на основе различных классических ортогональных систем
- программная реализация алгоритма быстрого преобразования на дискретного преобразование по локальным полям положительной характеристики
- изучение и применение различных подходов к сжатию и обработке изображений, а также анализу ошибки и потерь качества
- проведение серии преобразований изображений и сопоставление результатов

Необходимо отметить, что программная реализация должна быть расширяемой в том плане, что затраты на добавление реализованного нового метода дискретного преобразования не должна занимать времени большего, чем необходимо на отладку математической функции требуемого преобразования.

Для решения поставленных задач предполагается использование упомянутых методов и теорий, определяющим фактором выбора которых является

их распространенное успешное применение при решении подобных задач. В качестве исходных значений для преобразования традиционно будут использованы значения пикселей исходного изображения, подвергаемого цифровой обработке.

Программный интерфейс приложения будет содержать следующие элементы:

- панель выбора исходного изображения
- секцию выбора метода преобразования и его параметров
- секцию выбора количество элементов на сетке
- окна отображения выбранного и обработанного изображения
- уровни сжатия по каждому каналу

Реализация предполагает единообразный программный подход к исследуемым методам и используемым технологиям, поэтому необходимо разработать общий алгоритм соответствующий основным этапам обработки исходного изображения:

- разбиение исходного изображения на матрицы предопределенного пользователем размера по всем каналам
- применение обратного (анализ) БПФ (быстрое преобразование Фурье) ко всем матрицам
- обработка коэффициентов Фурье - сжатие
- применение прямого (синтез) БПФ ко всем матрицам
- построение итогового изображения из матриц по всем каналам

Прикладная программа будет производить стандартный метод сжатия - обнуление предопределенного числа (либо процентного соотношения) коэффициентов Фурье, наименьших по модулю. Далее результирующее изображение будет построено на основе целевой ортогональной системы с использованием компонент, среди которых будут обнуленные.

На данный момент не существует механизма оценки конечной ошибки в обработанном изображении. В качестве анализа ошибки будут использованы широко распространенные метрики.

Кроме того, подробно описан механизм, позволяющий сократить издержки вычислений и приблизить быстродействие алгоритма к ожидаемому количеству операций на практике.

Работа состоит из двух глав. Первая глава посвящена теоретическим вопросам преобразований Фурье, в том числе особое внимание уделяется быстрым дискретным преобразованиям по ортогональным системам ступенчатых функций, а так же новому алгоритму БПФ по локальным полям. Кроме того в конце главы приводится подробное теоретическое описание метода дискретного преобразования по локальным полям. Вторая глава содержит алгоритмы и схемы программной реализации преобразований Фурье, а также результаты обработки изображений и их сравнительный анализ.

Основное содержание работы Дискретные сигналы могут иметь различную природу, причем могут быть созданы непосредственно источником информации (например, дискретными датчиками в системах управления) или образовываться в результате дискретизации континуальных сигналов (например, в системах импульсной связи).

В отличие от континуальной функции сигнала $s(t)$, который является функцией непрерывной переменной t , дискретный сигнал $s(x)$ является функцией дискретной переменной x , принимающий только фиксированные значения. Если эти значения являются равноотстоящими, то выбрав соответствующий масштаб, их можно приравнять натуральным числам $x = 0, 1, \dots, n$. В этом случае x - номер отсчета сигнала.

В соответствии с работой [?] предлагается ввести следующие понятия:

Определение 1. *Полуинтервалы*

$$\Delta_m^{(k)} \equiv \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right), \quad 0 \leq m \leq 2^k - 1, \quad (1)$$

называют двоичным интервалом ранга $k \geq 0$. При этом $\Delta_0^{(0)} \equiv [0, 1)$.

Определение 2. *Совокупность всех интервалов ранга k будем называть двоичной сетью \mathfrak{R}_k ранга k .*

Сеть задает разбиение полуинтервалов $[0, 1)$, причем $[0, 1) = \bigcup_{m=0}^{2^k-1} \Delta_m^{(k)}$. Интервал ранга k , которому принадлежит точка x , будем обозначать $\Delta_{(x)}^{(k)}$. К каждой точке x стягивается единственная последовательность вложенных интервалов $\left\{ \Delta_{(x)}^{(k)} \right\}_{k=0}^{\infty}$.

Далее в соответствии с [?] приведем некоторые определения. В линейной теории континуальных сигналов дискретные сигналы представляются в виде линейной комбинации (взвешенной суммы) комплексных экспоненциальных функций, составляющих базисную систему. Набор весовых коэффициентов в такой комбинации называется спектром сигнала и он полностью определяет этот сигнал.

В случае конечного интервала определения сигналов такая линейная комбинация есть ряд Фурье, который в свою очередь, при некоторых дополнительных условиях переходит в преобразование Лапласа.

В обычной линейной теории дискретных сигналов их также представляют в виде линейной комбинации базисных дискретных экспоненциальных функций $e^{i\frac{2\pi}{N}kx}$, где k - номер функции в системе.

Определение 3. В случае конечного интервала определения такое представление, аналогичное ряду Фурье, называется дискретным преобразованием Фурье и имеет вид:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{N-1} S(k)e^{i\frac{2\pi}{N}kx}, \quad (2)$$

$$S(k) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} s(x)e^{-i\frac{2\pi}{N}kx}. \quad (3)$$

В определении 3 $s(x)$ и его спектр $S(k)$ являются дискретными функциями, определенными на \mathfrak{R}_k .

Как было отмечено выше, обычное дискретное преобразование Фурье имеет большую временную сложность алгоритма (порядка $O(n^2)$), что ограничивает его применение. Алгоритм быстрого преобразования Фурье основывается на таком математическом преобразовании как свёртка функций.

Быстрое преобразование Фурье-Хаара

Получим быстрый алгоритм нахождения коэффициентов Фурье для заданных значений ступенчатой функции $f(t)$ на двоичной сети ранга N , заданной по определению 2. Представим функцию как сумму первых 2^{N-1} и оставшихся компонент:

$$\begin{aligned}
f^N(t) &= \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n)X_n(t) + \sum_{n=2^{N-1}}^{2^N-1} \hat{f}(n)X_n(t) = \\
&= \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n)X_n(t) + r_{N-1}(t) \sum_{j=0}^{2^{N-1}} \hat{f}(2^{N-1} + j)h_j^{(N-1)}(t) = \\
&= f^{(N-1)}(t) + r_{N-1}(t)g^{(N-1)}(t)
\end{aligned} \tag{4}$$

где $h_j^{(N-1)}(t) = X_{\Delta}(N-1)(t)$, $f^{(N-1)}(t)$ - двоично-ступенчатая функция, постоянная на Δ^{N-1} , $g^{(N-1)}(t)$ - двоично ступенчатая, значения которой на Δ_j^{N-1} равно $\hat{f}(2^{N-1} + j)$. Записывая равенство (4) на полуинтервале $\Delta_j^{N-1} = \Delta_{2j}^{(N)} \cup \Delta_{2j+1}^{(N)}$, имеем систему

$$\begin{cases} f_{2j}^{(N)} = f_j^{(N-1)} + g_j^{(N-1)}, \\ f_{2j+1}^{(N)} = f_j^{(N-1)} + g_j^{(N-1)}. \end{cases} \tag{5}$$

Решая систему (5), находим $f_j^{(N-1)}$ и $g_j^{(N-1)}$. Полученный результат удобно представить в ином виде.

Пусть:

$$(\lambda)_n = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2^{N-1}-1}, \dots, \lambda_{2^N-1}) \tag{6}$$

вектор значений функции $f^{(N)}$. Равенство (5) для вектора (λ_n) запишем в виде:

$$\begin{cases} \lambda_j := \frac{1}{2}(\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1}) & (j = 0, 1, \dots, 2^{N-1} - 1) \\ \lambda_{2^{N-1}+j} := \frac{1}{2}(\lambda_{2j} - \lambda_{2j+1}) & (j = 0, 1, \dots, 2^{N-1}) \end{cases} \tag{7}$$

Таким образом, проведя преобразования (7), мы получим новый вектор $(\lambda_n)_{n=0}^{2^{N-1}}$, в котором последние компоненты $\lambda_{2^{N-1}+j} = \hat{f}(2^{N-1} + j)$, а первые компоненты $(\lambda_n)_{n=0}^{2^{N-1}-1}$ есть значения функции

$$f^{(N-1)} = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n)X_n(t) \quad (8)$$

кусочно постоянный на полуинтервале ранга $N-1$, причем коэффициенты Фурье - Хаара функции $f^{(N-1)}$ есть первые 2^{N-1} коэффициентов исходной функции $f^{(N)}$.

Продолжая последовательное применение формул (7), получаем после N -го шага последовательность $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2^N-1})$, которая совпадает с \hat{f} . Нетрудно посчитать, что число операций равно

$$2 * 2^N + 2 * 2^{N-1} + \dots + 2 * 2^1 \approx 2^{N+2}.$$

Быстрое преобразование Фурье-Уолша Задача ставится аналогично дискретному преобразованию Хаара. Пусть $N \in \mathbb{N}$ фиксировано, $f^{(N)}(x)$ - двоично-постоянная на $[0, 1)$ и $f_j = f^{(N)}(\Delta_j^{(N)})$. Пусть $w_j(x)$ - функция Уолша на $[0, 1)$. Тогда

$$f^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j)w_j(x) \quad (9)$$

Требуется найти коэффициенты $\hat{f}(j)$. Записываем (9) в виде

$$\begin{aligned} f^{(N)}(x) &= \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j)w_j(x) + r_{N-1}(x) \sum_{j=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(2^{N-1} + j)w_j(x) = \\ &= f^{(N-1)} + r_{N-1}(x)g^{(N-1)}(x) \end{aligned} \quad (10)$$

где $f^{(N-1)}$ и $g^{(N-1)}$ двоично-ступенчатая на интервалах ранга $N-1$.

Если значения функции $f^{(N)}(x)$ обозначим через $\lambda_j (j = 0, \dots, 2^N - 1)$, то дискретное преобразование для вектора

$$(\lambda_j) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2^{N-1}-1}, \lambda_{2^{N-1}}, \dots, \lambda_{2^N-1})$$

задается формулами

$$\begin{cases} \lambda_j := \frac{1}{2}(\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1}), \\ \lambda_{2^{N-1}+j} := \frac{1}{2}(\lambda_{2j} - \lambda_{2j+1}). \end{cases}$$

Это те же преобразования Хаара, и после их применения мы, как и в (), получаем вектор

$$(\lambda_j) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2^{N-1}-1}, \lambda_{2^{N-1}}, \dots, \lambda_{2^N-1}),$$

в котором первые 2^{N-1} компонент есть значения функции $f^{(N-1)}$, а последние 2^{N-1} компонент - значения функции $g^{(N-1)}$. Но в отличие от преобразования Хаара, значения $\lambda_{2^{N-1}}, \dots, \lambda_{2^N-1}$ не будут коэффициентами Фурье - Уолша функции $g^{(N-1)}$, и поэтому нужно применять преобразование 11 и к левой половине вектора (λ_n) , и к правой половине. Повторяя эту процедуру N раз, получаем последовательность коэффициентов Фурье - Уолша. Непосредственный подсчет дает число операций

$$2^{N+1} + 2^{N+1} + \dots + 2^{N+1} = N2^{N+1}.$$

Классические БПФ

Преобразования Хаара в среднем уступают на тех же входных настройках преобразованию Уолша по восстановленному образу – рисунок 2.

Кроме того, можно наблюдать различия между результатом при большом соотношении обнуленных компонент – рисунок 1.

БПФ по локальному полю

При стандартных настройках - быстродействие и качество сжатия сопоставимо с преобразованием Уолша на прочих равных условиях. Однако из-за вида уравнения $len = P^{SN}$, отвечающего за длину массива, становится оче-

видно, что обработке может быть подвержен массив длины, отличающейся от 2^k . В связи с этим возникает возможность проводить сжатия изображения по матрицам, соответствующим компонентам цветового канала, длины из широкого спектра допустимых значений. Однако, в качестве P могут быть заданы только простые числа.

Так же приведем некоторые результаты при различных высоких процентах сжатия – рисунок 3.

Заключение В данной работе была решена задача сжатия изображения различными методами быстрого преобразования Фурье.

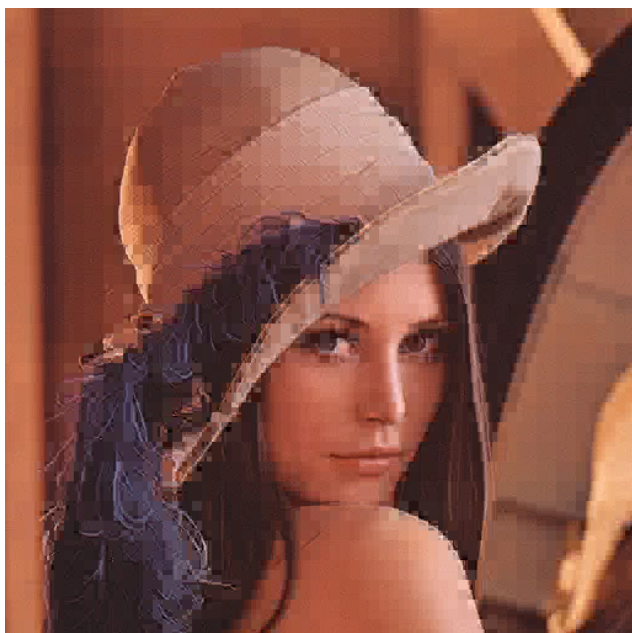
Достигнутым результатом является разработанное приложение позволяющее совершать сжатие изображения различными быстрыми преобразованиями Фурье при различных входных параметрах. Приложение имеет графический интерфейс JFrame и может быть запущено в любой среде с предустановленной платформой Java 8+.

Подробно описаны и рассмотрены основные трудности реализации математического преобразования с сохранением вычислительной трудоемкости.

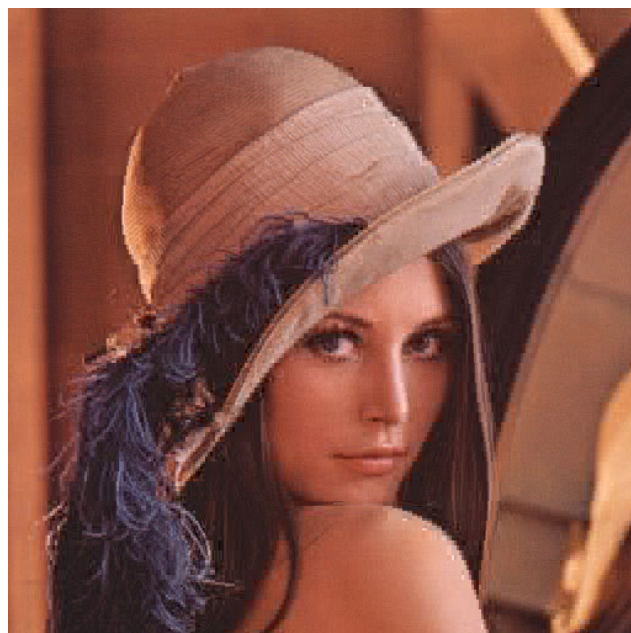
Приведены результаты сравнительного анализа обработки с применением различных метрик и цветовых схем.

Реализация программного обеспечения позволяет расширять спектр используемых преобразований Фурье, дополняя новыми классами программную реализацию. Также этому способствует реализация библиотеки операций над векторами и массивами, которые были использованы в вычислениях.

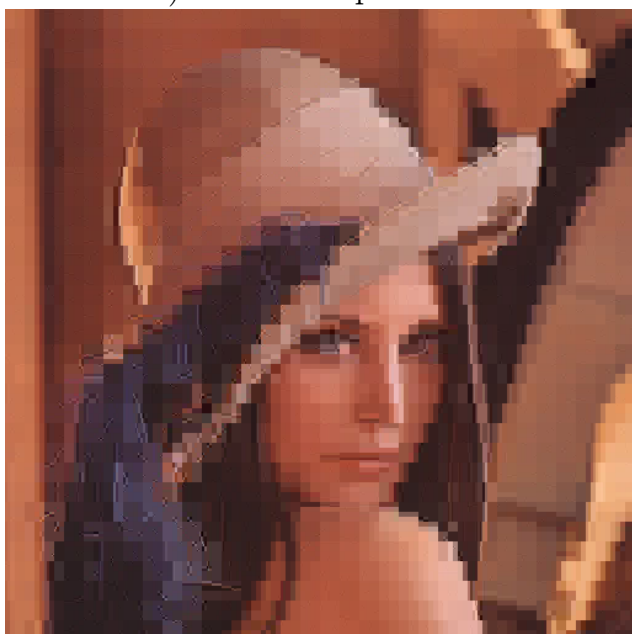
Данная работа демонстрирует возможности применения метода быстрых дискретных преобразований на основе различных ортонормированных систем ступенчатых функций, а так же нового подхода, основанного на БПФ по локальным полям, одних из важнейших методов в обработке цифровых сигналов современной науки.



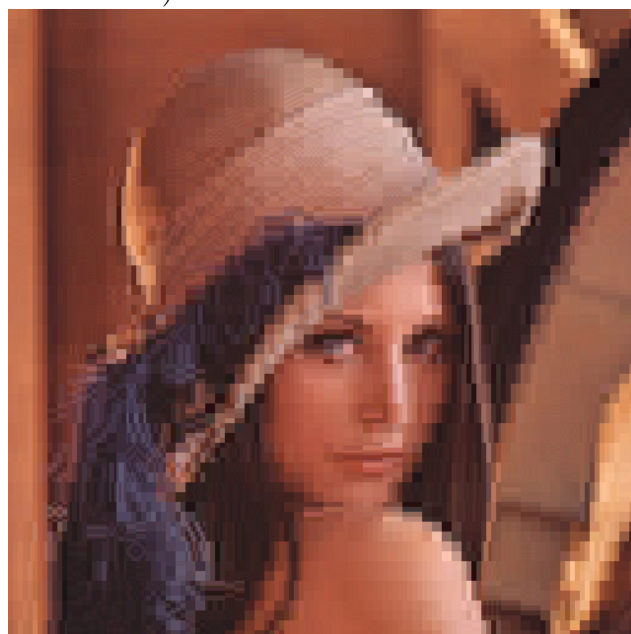
а) БПФ Хаара – 97%



б) БПФ Уолша – 97%

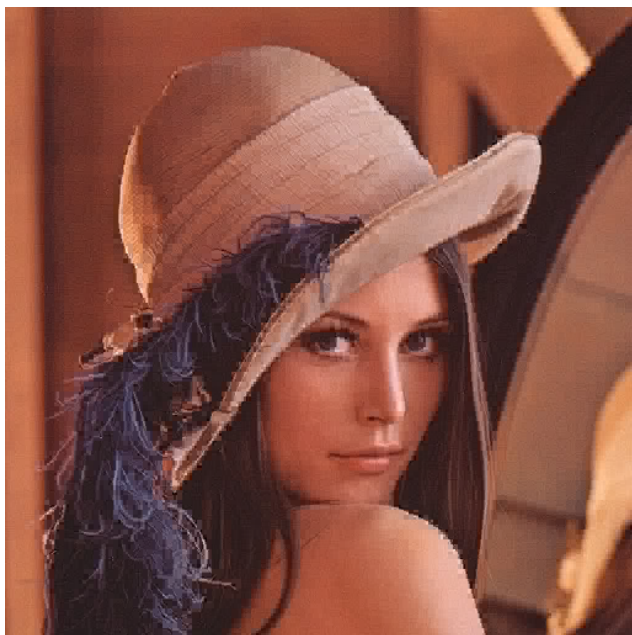


в) БПФ Хаара – 99%



г) БПФ Уолша – 99%

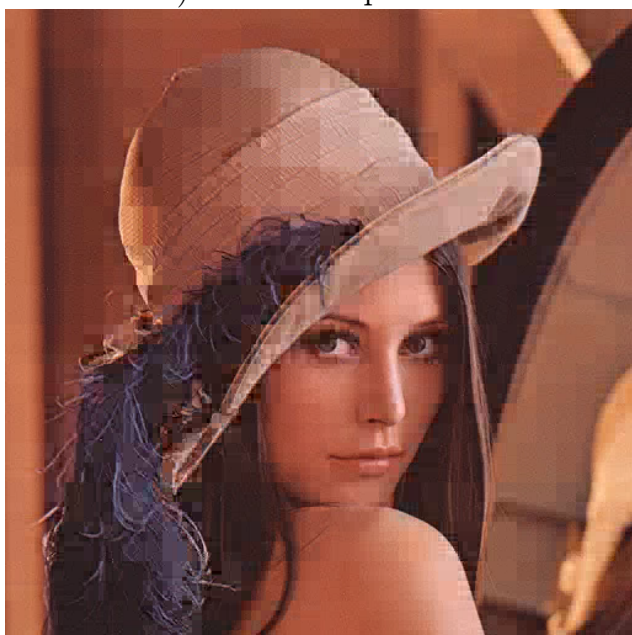
Рисунок 1 — Результаты при сжатии по схеме YCrCb.



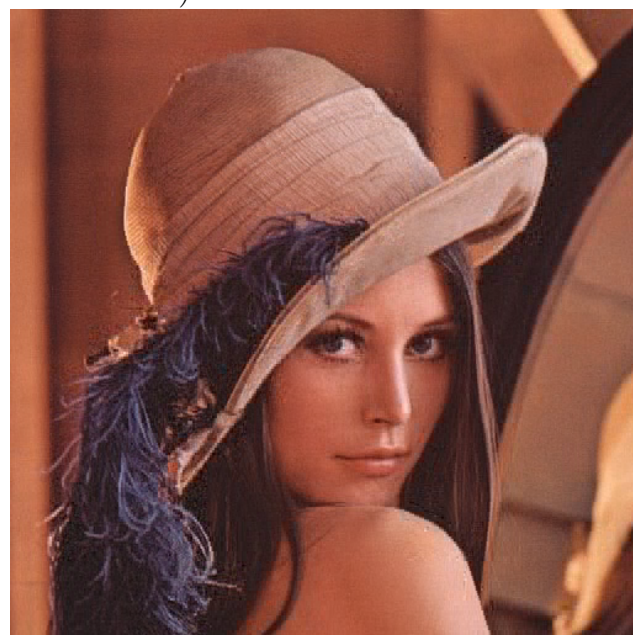
а) БПФ Хаара – x8



б) БПФ Уолша – x8



в) БПФ Хаара – x32

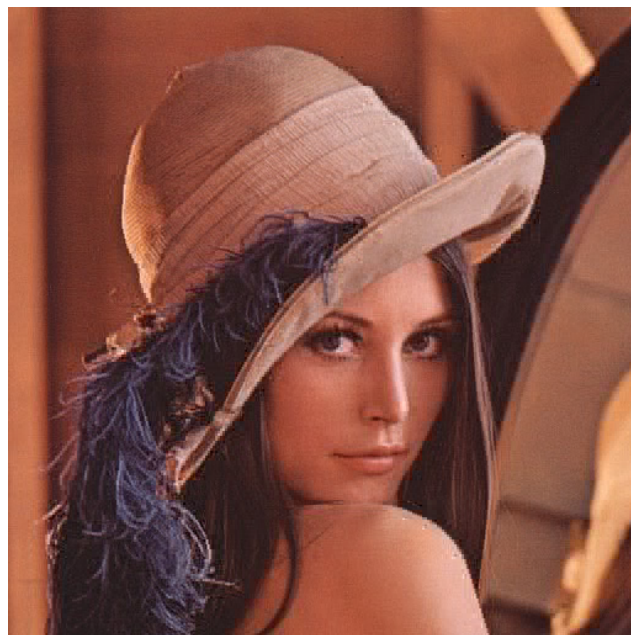


г) БПФ Уолша – x32

Рисунок 2 — Результаты при различных размерах матриц при общем сжатии по схеме YCrCb – 95%.



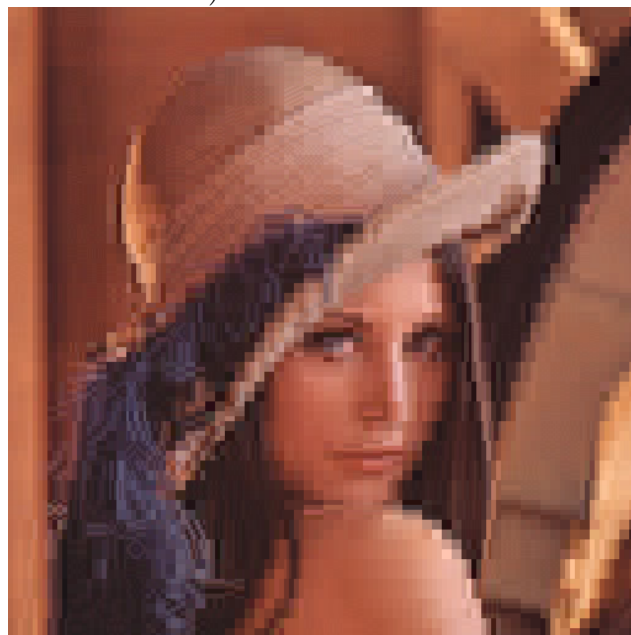
а) YCrCb – 92%



б) YCrCb – 95%



в) YCrCb – 97%



г) YCrCb – 99%

Рисунок 3 — Результаты сжатия изображения при использовании БПФ по локальному полю, при $P = 2, S = 2, N = 2$.

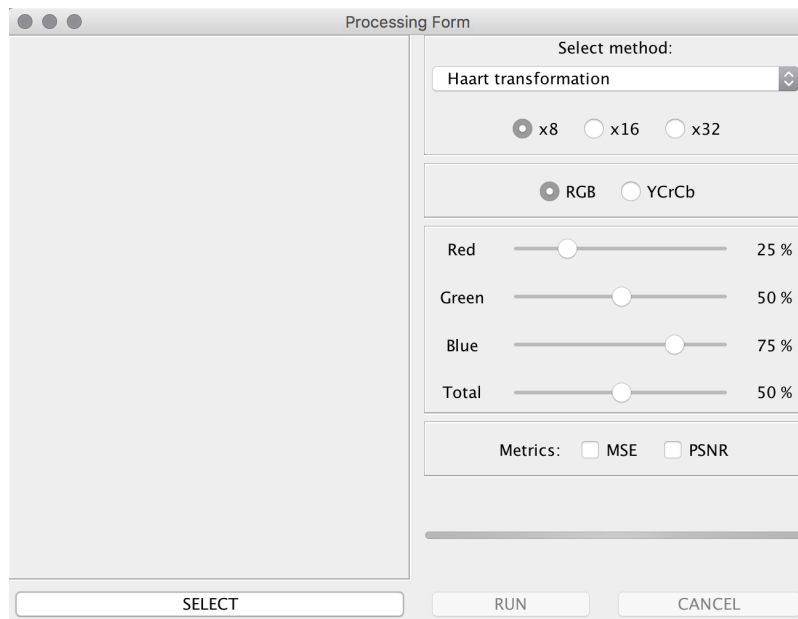


Рисунок 4 — Вид интерфейса после запуска приложения

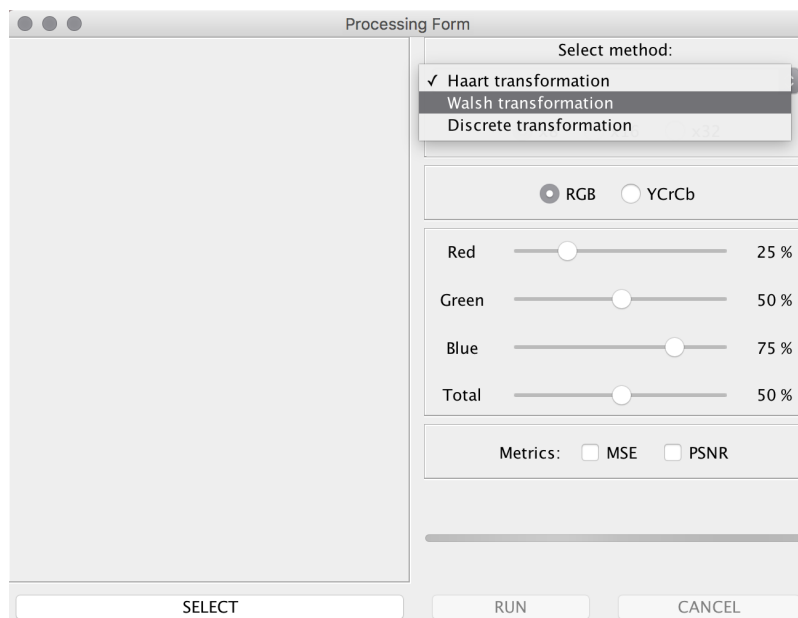


Рисунок 5 — Панель выбора метода преобразования

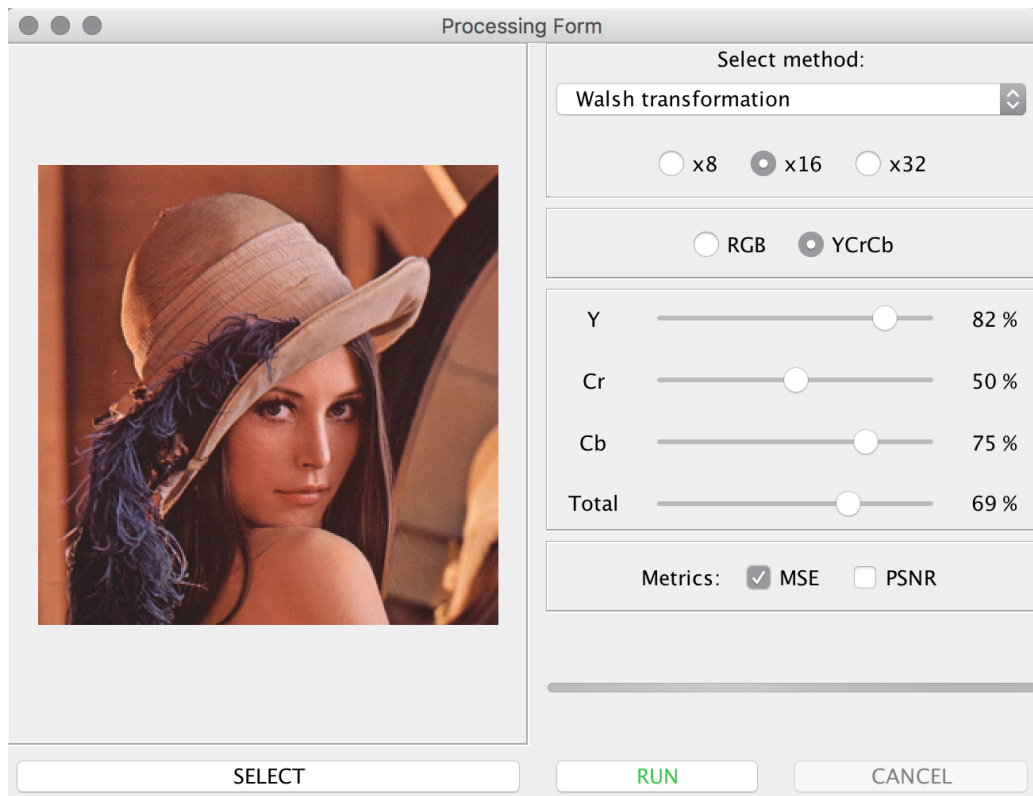


Рисунок 6 — Вид интерфейса при выбранных параметрах преобразования, исходного изображения и степени сжатия

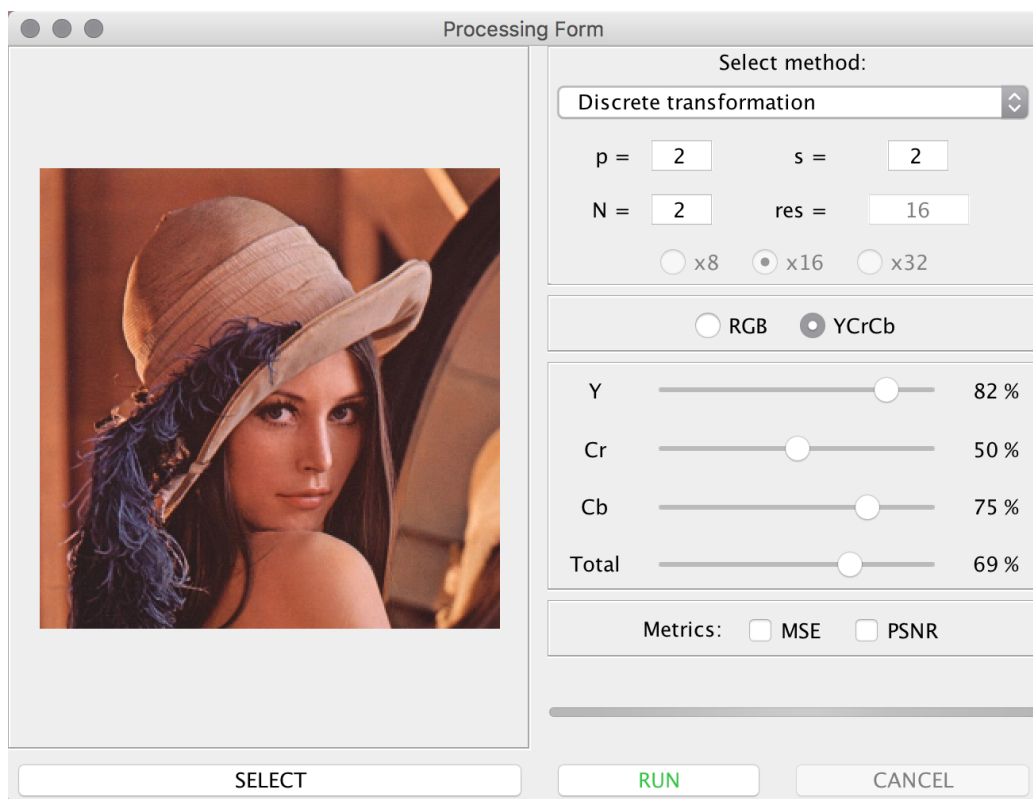


Рисунок 7 — Дополнительная панель параметров P , S , N при выбранном преобразовании по локальным полям

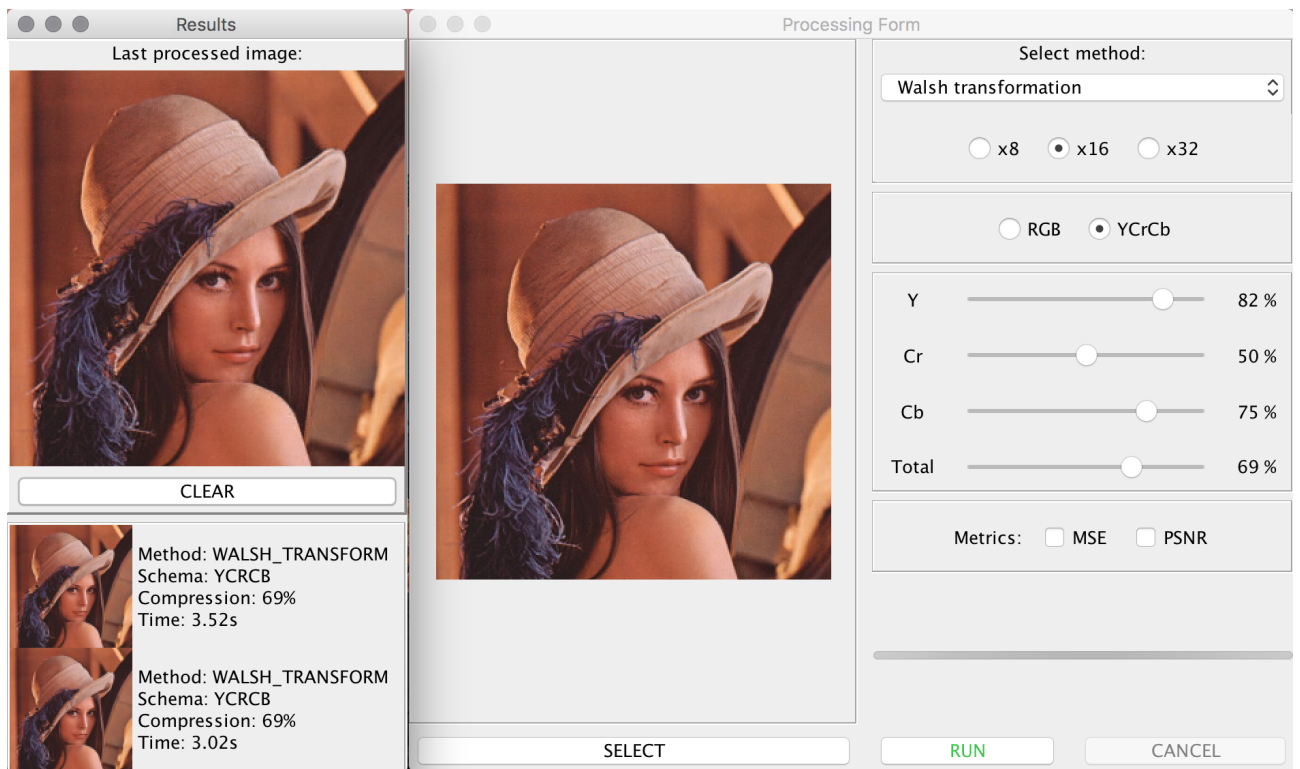


Рисунок 8 — Панель результатов обработки с необходимой информацией о соответствующем обработанном изображении

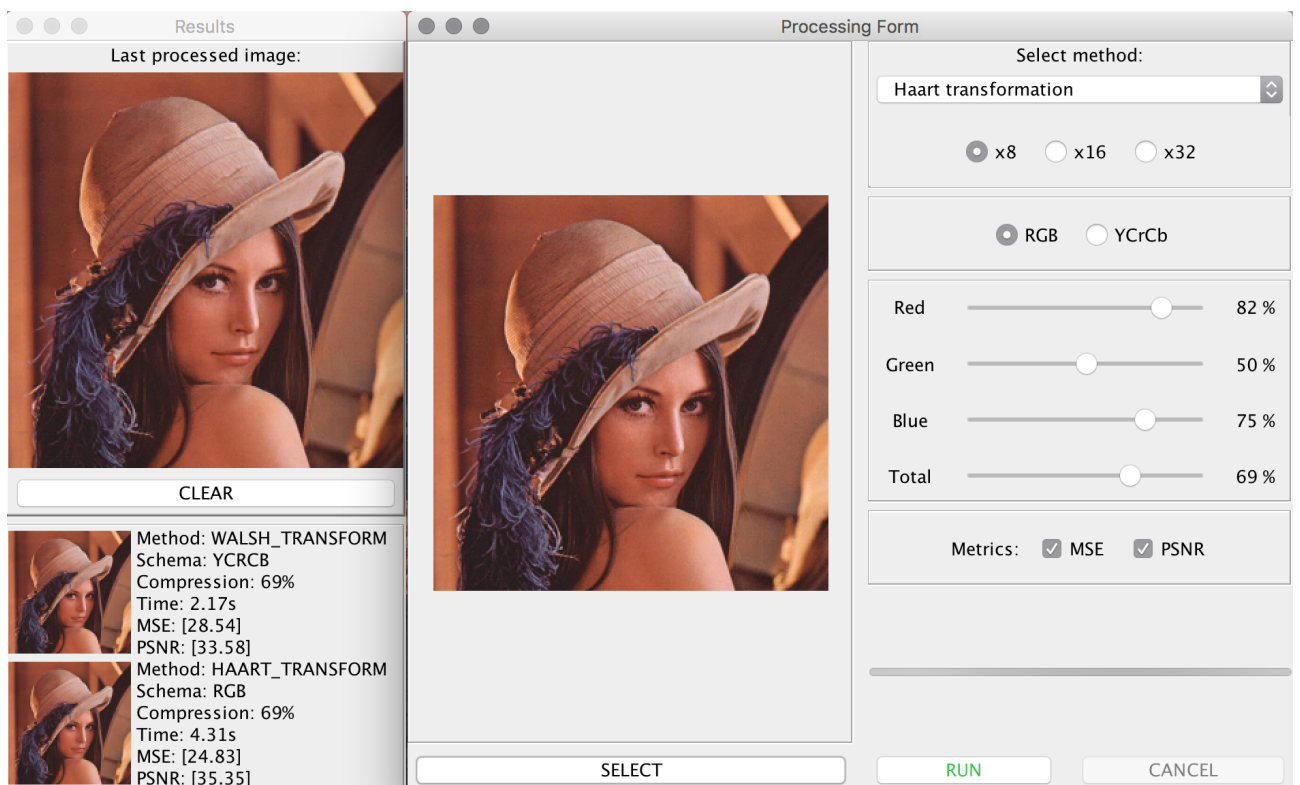


Рисунок 9 — Панель результатов при выбранных метриках