Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

Моделирование исходных данных в некорректно поставленных задачах
название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки)__4___ курса __411__группы

направления _01.03.02 – Прикладная математика и информатика___________
код и наименование направления
________________механико-математического факультета_________________
наименование факультета, института, колледжа
____________________Мыльцина Владимира Викторовича________________
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
д.ф-м.н., профессор____ ____________________ _Г.В. Хромова_
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., профессор_____ ____________________ ___В.А. Юрко____
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов, 2018 год

ВВЕДЕНИЕ

Теория некорректных задач — направление математики, связанное с самыми разнообразными прикладными проблемами: интерпретацией показаний многих физических приборов, геофизических, геологических, астрономических наблюдений, оптимизацией управления и планирования, синтезом автоматических систем. Развитие теории некорректных задач обусловлено появлением современной вычислительной техники.

Обратные задачи представляют собой типичный пример некорректно поставленных задач, а их решение и практическое использование сопряжены с определенными трудностями. В первую очередь это трудности разработки методов и алгоритмов, дающих возможность получать достаточно точные и устойчивые результаты, так как произвольно малые отклонения входных данных могут вызвать большие изменения результатов решения.

При построении математических моделей физических задач мы неизбежно сталкиваемся с тем, что исходные данные этих задач всегда заданы приближенно, поскольку получаются в результате иземрений. Поэтому функции, являющиеся исходными данными, нуждаются в предварительной математической „обработке“. О том, как это можно сделать, и идет речь в данной работе.

Для решения некорректных задач на практике прибегают к численным методам.

Целью работы является моделирование функции заданной с погрешностью и её востановление с помощью разных операторов.

В первом разделе предтавлена постановка задачи и численный эксперимент по решению задачи востановления непрерывных функций.

Во втором разделе представлено численное решение данной задачи.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Постановка задачи. Дано $f_\delta(x) \in L_2$. Нужно найти $\tilde{f}_\delta \in C$, где δ:

$$||f_\delta(x) - f(x)||_{L_2} \leq \delta. \tag{1}$$

$$||\tilde{f}_\delta(x) - f(x)||_{L_2} \overset{\delta\to 0}{\to} 0\ . \tag{2}$$

Оператор Стеклова.

Оператор Стеклова имеет вид:

$$S_h f = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt. \tag{3}$$

Для решения задачи с помощью этого оператора нужно найти $S_h f_\delta$, так как:

$$S_h f_\delta = \tilde{f}_\delta(x). \tag{4}$$

Найдём оценку для формулы (2) подставив (4)

$$|S_h f_\delta - f| = |S_h f_\delta - S_h f + S_h f - f| \leq |S_h f_\delta - S_h f| + |S_h f - f|. \tag{5}$$

Первый модуль в правой части выражения (5) можно оценить следующим образом:

$$|S_h f_\delta - S_h f| = |S_h(f_\delta - f)| = \frac{1}{2h}\left|\int_{x-h}^{x+h}(f_\delta(t) - f(t))dt\right|. \tag{6}$$

По не равенству Коши — Буняковского получаем:

$$|S_h(f_\delta - f)| \leq \frac{1}{2h}\sqrt{\int_{x-h}^{x+h}(f_\delta(t) - f(t))^2 dt}\sqrt{\int_{x-h}^{x+h} dt}. \tag{7}$$

Первый корень есть норма в L_2. Следовательно получем:

$$|S_h(f_\delta - f)| \leq \frac{\delta}{\sqrt{2h}}. \tag{8}$$

Пусть $f(x) \in Lip_M 1$. Тогда второй модуль в правой части выражения (5) можно оценить модулем непрерывности $\omega(h)$.

$$|S_h f - f| \leq \omega(h) \leq Mh. \tag{9}$$

Подставляя в (5) формулы (8),(9) получаем:

$$|S_h f_\delta - f| \leq \frac{\delta}{\sqrt{2h}} + Mh. \tag{10}$$

Найдём зависимость $h(\delta)$ такое что:

1. $h(\delta) \to 0, \delta \to 0$
2. $|S_h f_\delta - f| \to 0, \delta \to 0$

Найдём минимум формулы (10):

$$\varphi(h,\delta) = Mh + \frac{\delta}{\sqrt{2h}}; \tag{11}$$

$$\varphi_h^{'}(h,\delta) = 0; \tag{12}$$

$$M - \frac{\delta}{2\sqrt{2h^3}} = 0; \tag{13}$$

$$h(\delta) = \left(\frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{14}$$

Иногда нам не известно про функцию f(x) ничего кроме, что f(x) произвольная непрерывная функция, тогда мы выбираем $h(\delta)$ из соображений, что:

$$\frac{\delta}{\sqrt{2h}} \to 0, \delta \to 0. \tag{15}$$

Оператор T_h.

Оператор T_h имеет вид:

$$T_h f = a(h) \int_{x-h}^{x+h} (h^2 - (t-x)^2) f(t) dt. \tag{16}$$

a(h) ищется из соображения что

$$T_h 1 \equiv 1. \tag{17}$$

$$T_h 1 = a(h) \int_{x-h}^{x+h} (h^2 - (t-x)^2) dt = a(h) \frac{4}{3} h^3 \equiv 1. \tag{18}$$

Следовательно:

$$a(h) = \frac{3}{4h^3}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (16) получаем:

$$T_h f = \frac{3}{4h^3} \int_{x-h}^{x+h} (h^2 - (t-x)^2) f(t) dt. \tag{20}$$

Для решения задачи с помощью этого оператора нужно найти $T_h f_\delta$, так как:

$$T_h f_\delta = \tilde{f}_\delta(x). \tag{21}$$

Найдём оценку для формулы (2) подставив (4)

$$|T_h f_\delta - f| = |T_h f_\delta - T_h f + T_h f - f| \le |T_h f_\delta - T_h f| + |T_h f - f|. \tag{22}$$

Первый модуль в правой части выражения (22) можно оценить следующим образом:

$$|T_h f_\delta - T_h f| = |T_h (f_\delta - f)| = \frac{3}{4h^3} \left| \int_{x-h}^{x+h} (h^2 - (t-x)^2)(f_\delta(t) - f(t)) dt \right|. \tag{23}$$

По не равенству Коши — Буняковского получаем:

$$|T_h(f_\delta - f)| \le \frac{3}{4h^3}\sqrt{\int_{x-h}^{x+h}(f_\delta(t)-f(t))^2dt}\sqrt{\int_{x-h}^{x+h}(h^2-(t-x)^2)^2dt}. \tag{24}$$

Первый корень есть норма в L_2. Следовательно получем:

$$|T_h(f_\delta - f)| \le \frac{\delta\sqrt{3}}{\sqrt{5h}}. \tag{25}$$

Пусть $f(x) \in Lip_M 1$. Тогда второй модуль в правой части выражения (22) можно оценить модулем непрерывности $\omega(h)$.

$$|T_h f - f| \le \omega(h) \le Mh. \tag{26}$$

Подставляя в (22) формулы (26),(25) получаем:

$$|T_h f_\delta - f| \le \frac{\delta\sqrt{3}}{\sqrt{5h}} + Mh. \tag{27}$$

Найдём зависимость $h(\delta)$ такое что:

1. $h(\delta) \to 0, \delta \to 0$
2. $|T_h f_\delta - f| \to 0, \delta \to 0$

Найдём минимум формулы (27):

$$\varphi(h,\delta) = Mh + \frac{\delta\sqrt{3}}{\sqrt{5h}}; \tag{28}$$

$$\varphi_h^{'}(h,\delta) = 0; \tag{29}$$

$$M - \frac{\delta\sqrt{3}}{2\sqrt{5h^3}} = 0; \tag{30}$$

$$h(\delta) = \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{31}$$

Иногда нам не известно про функцию f(x) ничего кроме, что f(x) произвольная непрерывная функция, тогда мы выбираем $h(\delta)$ из соображений, что:

$$\frac{\delta\sqrt{3}}{\sqrt{5h}} \to 0, \delta \to 0. \tag{32}$$

Оператор $T_h^{'}$.

$$T_h^{'}f = (T_h f)_x^{'} = \frac{3}{2h^3}\int_{x-h}^{x+h}(t-x)f(t)dt. \tag{33}$$

$$||T_h^{'}f_\delta - f^{'}|| \leq ||T_h^{'}f_\delta - T_h^{'}f|| + ||T_h f^{'} - f^{'}||. \tag{34}$$

Первый модуль в правой части выражения (34) можно оценить следующим образом:

$$||T_h^{'}f_\delta - T_h^{'}f|| \leq ||T_h^{'}||\delta. \tag{35}$$

Подсчитаем норму в правой части выражения (35):

$$||T_h^{'}|| = \frac{3}{4h^3}\max_{a\leq x\leq b}\sqrt{\int_{x-h}^{x+h}(2(t-x))^2 dt} = \sqrt{\frac{3}{2h^3}}. \tag{36}$$

Пусть $f^{'}(x) \in Lip_M 1$. Тогда второй модуль в правой части выражения (34) можно оценить модулем непрерывности $\omega(h)$.

$$|T_h f - f| \leq \omega(h) \leq Mh. \tag{37}$$

Подставляя в (34) формулы (36),(37) получаем:

$$||T_h^{'}f_\delta - f^{'}|| \leq \sqrt{\frac{3}{2h^3}}\delta + Mh. \tag{38}$$

Найдём зависимость $h(\delta)$ такое что:

1. $h(\delta) \to 0, \delta \to 0$

2. $|T_h^{'} f_\delta - f^{'}| \to 0, \delta \to 0$

Найдём минимум формулы (38):

$$\varphi(h, \delta) = \sqrt{\frac{3}{2h^3}}\delta + Mh; \tag{39}$$

$$\varphi_h^{'}(h, \delta) = 0; \tag{40}$$

$$M - \frac{3\delta\sqrt{3}}{2\sqrt{2h^5}} = 0; \tag{41}$$

$$h(\delta) = \delta^{\frac{2}{5}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{5}}. \tag{42}$$

Иногда нам не известно про функцию $f^{'}(x)$ ничего кроме, что $f^{'}(x)$ произвольная непрерывная функция, тогда мы выбираем $h(\delta)$ из соображений, что:

$$\sqrt{\frac{3}{2h^3}}\delta \to 0, \delta \to 0. \tag{43}$$

Моделирование функции. Моделироваение функции с заданной погрешностью занимает одно из важных мест в некорректно поставленных задачах. Иногда что бы проверить метод не достаточно его проверить аналетически нужно удостовериться в правельности его работы на примерах. Для этого нужно сначало смоделировать функцию с заданной погрешностью и только потом применять для неё то или иной метод востановления.

Пусть $f(x) \in C[a, b]$. Разобьем отрезок на n частей. $[a, b] = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, где x_i - точки разбиений. Функцию $f(x)$ заменим набором ее значений в узлах т.е. $f(x) = \{f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)\}$. Смоделируем функцию $f_\delta(x)$, которая будет удовлетворять следующему неравенству:

$$||f_\delta(x) - f(x)||_{L_2} \leq \delta. \tag{44}$$

Распишем норму в L_2 по формуле:

$$||f(x)||_{L_2} = \sqrt{\int_b^a f(x)^2 dx}. \tag{45}$$

Следовательно получаем:

$$\sqrt{\int_b^a (f_\delta(x) - f(x))^2 dx} \le \delta. \tag{46}$$

Для вычисления интеграла воспользуемся квадратурной формулой прямоугольников:

$$\int_b^a f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i). \tag{47}$$

где n - число разбиений отрезка. Получаем:

$$\sqrt{\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f_\delta(x_i) - f(x_i))^2} \le \delta. \tag{48}$$

Проведём моделирование функции $f_\delta(x)$. Сначало рассмотрим набор значений $f_\delta(x_i)$ по формуле:

$$f_\delta(x_i) = f(x_i) + (-1)^i A_i, i = 0, 1, ..., n; A_i = random[0, \delta]. \tag{49}$$

Затем испортим некоторые значения $f_\delta(x_i)$ с помощью „всплесков“ в m точках.

$$f_\delta(x_i) = f(x_i) + N_i; N_i = Const. i = 0, 1, ..., m-1. \tag{50}$$

Подставим в (48) $f_\delta(x_i)$ из формул (49) и (50). Тогда получаем:

$$\sqrt{\frac{b-a}{n} (\sum_{i=0}^{n-m-1} A_i^2 + \sum_{j=0}^{m-1} N_j^2)} \le \delta. \tag{51}$$

В первой сумме участвуют узлы в которых нет „всплесков“. Во второй сумме j принимает значения тех i, для которых существуют „всплески“.

Проведём численный эксперимент для функции $f(x) = x$, a=0, b=1. Тогда формула (51) примет вид:

$$\sqrt{\frac{1}{n}(\sum_{i=0}^{n-m-1} A_i^2 + \sum_{j=0}^{m-1} N_j^2)} \leq \delta. \qquad (52)$$

Задаем n, δ. Выбираем N_i так чтобы выполнялась оценка (52).

Заключение

В данной работе для решения задачи был выбран оператор Стеклова. На его примере было сделано моделирование функции с погрешность и её востановление. Было замечено, что чем больше у моделируемой функции „всплесков“, тем хуже она востанавливалась. И наоборот. Так же была получина законамерность: чем точнее выбрано δ и формула для согласования h с δ тем лучше получались результаты вычисления.