Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

Конструктивное решение обратных узловых задач

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки)__4___ курса __411__группы

направления _01.03.02 – Прикладная математика и информатика___________
код и наименование направления
________________механико-математического факультета__________________
наименование факультета, института, колледжа
______________Карандашевой Гульнары Рашидовны____________________
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф-м.н., доцент ___________________ М.Ю. Игнатьев
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., профессор_____ ___________________ В.А. Юрко_____
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов, 2018 год

Введение. В настоящей работе исследуется обратная узловая задача для дифференциального пучка $L = L(q_0(x), q_1(x))$ вида:

$$y'' + \left(\rho^2 - 2\rho q_1(x) - q_0(x)\right)y = 0, \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где ρ – спектральный параметр и $q_m(x) \epsilon W_1^m[0,1], m = 1,2$ – вещественные функции.

Далее рассмотрены два алгоритма решения обратной узловой задачи.

Сначала вводится доказательство, о том, что при естественной нумерации n-я собственная функция пучка L для достаточно больших $|n|$ имеет в точности $|n| - 1$ узел на интервале $(0,1)$, что является обобщением осцилляционной теоремы Штурма для оператора Штурма-Лиувилля.

Основное содержание работы. Заметим, что для любой постоянной C пучок

$$L_c = L(q_0(x) + 2Cq_1(x) - C^2, q_1(x) - C)$$

Обладает теми же собственными функциями что и L. В самом деле, L_c получается из L сдвигом спектрального параметра $\rho \to \rho + C$. Ниже доказано, что при $q_1(x) \neq const$ - это единственная модификация L, сохраняющая узловые точки.

В дальнейшем будем считать, что

$$\omega \coloneqq \int_0^1 q_1(x)\, dx = 0,$$

и исключим из рассмотрения оператор Штурма-Лиувилля ($q_1 \equiv 0$) и предположим также, что $q_1 \neq const$. Учитывая эти условия, доказываем единственность восстановления функций $q_0(x), q_1(x)$ по любому всюду плотному множеству узлов и получаем алгоритм решения обратной узловой задачи.

Теорема об осцилляции. Асимптотика узловых точек. Пусть функция $S(x,\rho)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям $S(0,\rho)=0, S'(0,\rho)=1$. Нули собственных функций пучка L совпадают с нулями характеристической функции $\Delta(\rho) \coloneqq S(1,\rho)$.

Обозначим $Q(x) \coloneqq \int_0^x q_1(t)\,dt$ (5)

Известным методом доказывается, что

$$S(x,\rho)=\frac{\sin\bigl(\rho x-Q(x)\bigr)}{\rho}+\xi(x,\rho), \qquad (6)$$

где

$$\xi^{(v)}(x,\rho)=O\left(\frac{1}{\rho^{2-v}}\exp(|Im\,\rho|x)\right), \qquad v=0,1, \qquad |\rho|\to\infty, \qquad (7)$$

равномерно по $x \in [0,1]$. Из (6) и (7) имеем

$$\Delta(\rho)=\frac{\sin\rho}{\rho}+O\left(\frac{1}{\rho^2}\exp(|Im\,\rho|)\right), \qquad |\rho|\to\infty, \qquad (8)$$

С помощью этого представления и теоремы Руше доказывается, что краевая задача (1), (2) обладает счетным множеством собственных значений ρ_n, имеющих вид

$$\rho_n=\pi n+O\left(\frac{1}{n}\right),\ |n|\to\infty \qquad (9)$$

Теорема 1

Для достаточно больших $|n|$ собственные функции $y_n(x) \coloneqq S(x,\rho_n)$ имеют $|n|-1$ нулей x_n^j на интервале *(0,1):*

$0<x_n^1<x_n^2<\cdots<x_n^{n-1}<1$ для *n>0*

и

$0<x_n^{-1}<x_n^{-2}<\cdots<x_n^{n+1}<1$ для *n<0.*

Кроме того,

$$x_n^j=\frac{j}{n}+\frac{Q(\frac{j}{n})}{\pi n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), |n|\to\infty, \qquad (10)$$

Равномерно по j.

Доказательство. Сначала заметим что ρ_n вещественны для достаточно больших $|n|$. В самом деле согласно (9) для достаточно больших $|n|$ в круге $D_n \coloneqq \{\rho: |\rho-\pi n|\le 1\}$ лежит в точности одно собственное значение ρ_n. Учитывая вещественность коэффициентов пучка L, заключаем, что $\overline{\rho_n} \in D_n$

также является его собственным значением, а следовательно $\rho_n = \overline{\rho_n}$. Таким образом, для больших $|n|$ собственные функции $y_n(x)$ вещественнозначны.

Подставляя (9) в (6), приходим к

$$\rho_n y_n(x) = sin\big(\pi n x - Q(x)\big) + \varepsilon_n(x), \tag{11}$$

где в силу *(7)*

$$\varepsilon_n^{(v)}(x) = O\left(\frac{1}{n^{1-v}}\right),\ v = 0,1, |n| \to \infty, \tag{12}$$

Равномерно на [0,1]. Рассмотрим на интервале (0,1) уравнение $y_n(x) = 0$, которое согласно (11), (12) равносильно при больших $|n|$ совокупности уравнений

$$x = \chi_n^j(x) := \frac{j}{n} + \frac{Q(x)}{\pi n} + \varepsilon_n^j(x),\ j\epsilon\mathbb{Z}, \tag{13}$$

где

$$\varepsilon_n^j(x) = (-1)^{j+1}\frac{arcsin\,\varepsilon_n(x)}{\pi n}.$$

Оценки (12) дают

$$\left(\varepsilon_n^j\right)^{(v)}(x) = O\left(\frac{1}{n^{2-v}}\right), v = 0,1, |n| \to \infty \tag{14}$$

Равномерно по $j\epsilon\mathbb{Z}$ *и* $x\epsilon[0,1]$. Продолжим на $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ функцию $q_1(x)$ нулем, а функции $\varepsilon_n^j(x)$ на $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ таким образом, чтобы полученные функции были дифференцируемы на $(-\infty,\infty)$ и удовлетворяли (14) равномерно по $x \in \mathbb{R}$ и $j\epsilon\mathbb{Z}$.

Приведем пример такого продолжения $\varepsilon_n^j(x)$ *=0 на* $\left(-\infty,-\frac{1}{|n|}\right] \cup [1 + \frac{1}{|n|},+\infty)$

$$\varepsilon_n^j(x) = \begin{cases} |n|^3\left(x+\frac{1}{|n|}\right)^2(\varepsilon_n^j(0)\left(\frac{1}{|n|}-2x\right)+(\varepsilon_n^j)'(0)\frac{x}{|n|}), & x \in (-\frac{1}{|n|},0), \\ n^2\left(x-1-\frac{1}{|n|}\right)^2(\varepsilon_n^j(1)\big(1+2|n|(x-1)\big)+(\varepsilon_n^j)'(1)(x-1)), & x \in (1,1+\frac{1}{|n|}). \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (13) на $\mathbb{R}$. Согласно (14) и формуле

$$X_n^j(x_1) - X_n^j(x_2) = \frac{1}{\pi n}\int_{x_2}^{x_1} q_1(t)dt + (\varepsilon_n^j)'(\theta)(x_1 - x_2),\ \ \theta\epsilon(x_1,x_2),$$

Существует n_0, такое что для любых $|n| \geq n_0$ функция $X_n^j(x)$ осуществляет сжатие в $\mathbb{R}$. Значит для всех $j \epsilon \mathbb{Z}$ уравнение (13) имеет единственное решение в $\mathbb{R}$. Которое обозначим x_n^j. Подставляя x_n^j в (13) получаем

$$x_n^j = \frac{j}{n} + \frac{Q(\frac{j}{n})}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad |n| \to \infty, \tag{15}$$

равномерно по $j \epsilon \mathbb{Z}$. В частности имеем

$$x_n^j = \frac{j}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \ |n| \to \infty,$$

Равномерно по j. Подставим это выражение в правую часть (15), получаем (10), что, в свою очередь, дает

$$x_n^{j+1} - x_n^j = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \ |n| \to \infty,$$

Равномерно по j. Следовательно, для больших $|n|$ будем иметь $x_n^j < x_n^{j+1}$ для положительных n и $x_n^j > x_n^{j+1}$ для отрицательных n. Для $j = 0, \pm 1, n, \pm n$ формула (10) дает

$$x_n^{-1} = -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$x_n^0 = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$x_n^1 = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$x_n^{n-1} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$x_n^n = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$x_n^{n+1} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Таким образом, из граничных условий (2) и порядка чисел x_n^j получаем $x_n^0 = 0$, $x_n^n = 1$ для больших $|n|$. Заключаем, что в точности $|n| - 1$ нулей лежит на интервале (0,1), а именно: $x_n^j, j = \overline{1, n-1}$, для положительных n и $x_n^j, j = \overline{n+1, -1}$, для отрицательных n.

Следствие 1

Из (10) следует, что множество всех узлов X всюду плотно в [0,1]

Теорема 2

В представлении

$$x_n^j = \frac{j}{n} + \frac{Q(x_n^j)}{\pi n} + \delta_n^j, \tag{16}$$

где

$$\delta_n^j = \frac{1}{2(\pi n)^2}\left(\int_0^{x_n^j}(q_0(t) + q_1^2\,(t))dt - \omega_1 x_n^j - (A_n^j - A_n^n x_n^j)\right) + \frac{1}{2(\pi n)^3}$$

$$+\left(\int_0^{x_n^j}(q_0(t) + q_1^2\,(t))q_1(t)dt - \omega_2 x_n^j\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$|n| \to \infty, \tag{17}$$

равномерно по j, где

$$\omega_1 = \int_0^1 (q_0(t) + q_1^2\,(t))dt,$$

$$\omega_2 = \int_0^1 (q_0(t) + q_1^2\,(t))q_1(t)dt,$$

$$A_n^j = \int_0^{x_n^j}(q_0(t) + q_1^2\,(t))\,cos\big(2\pi nt - 2Q(t)\big)\,dt$$

$$-\int_0^{x_n^j}(q_1'(t)\,sin\big(2\pi nt - 2Q(t)\big)\,dt \tag{18}$$

Доказательство

Вычислим более точную асимптотику спектра.

$$\xi(x,\rho) = \frac{1}{2\rho^2}\Big\{\big(q_1(0) + q_1(x)\big)\,sin\big(\rho x - Q(x)\big)$$

$$- cos\big(\rho x - Q(x)\big)\int_0^x \big(q_0(t) + q_1^2(t)\big)dt$$

$$+ \int_0^x \big(q_0(t) + q_1^2(t)\big)cos(\,\rho(x - 2t) - Q(x) + 2Q(t))dt$$

$$+ \int_0^x q'_1(t)\,sin\big(\rho(x - 2t) - Q(x) + 2Q(t)\big)\,dt\Big\} +$$

$$+\frac{1}{4\rho^3}\Bigg\{\Bigg[q_1^2(0)+q_1^2(x)+\frac{\big(q_1(0)+q_1(x)\big)^2}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\int_0^x (q_0(t)+q_1^2(t))\,dt\right)^2\Bigg] sin\big(\rho x-Q(x)\big)$$

$$-\cos\big(\rho x-Q(x)\big)\int_0^x (q_0(t)+q_1^2(t))(\,q_1(0)+q_1(x)+2q_1(t))dt\Bigg\}$$

$$+\,o\left(\frac{1}{\rho^3}exp(|Im\rho|x)\right), \tag{19}$$

$|\rho|\to\infty,$ равномерно по $x\in[0,1]$.

$$\Delta(\rho)$$

$$=\frac{sin\rho}{\rho}$$

$$+\frac{1}{2\rho^2}\Bigg\{\big(q_1(0)+q_1(1)\big)\sin\rho-\omega_1\cos\rho$$

$$+\int_0^1 \big(q_0(t)+q_1^2(t)\big)cos(\rho(1-2t)+2Q(t))dt+$$

$$+\int_0^1 q'_1(t)\,sin\big(\rho(x-2t)+2Q(x)+2Q(t)\big)\,dt\Bigg\}$$

$$+\frac{1}{4\rho^3}\Bigg\{\Bigg[q_1^2(0)+q_1^2(1)+\frac{\big(q_1(0)+q_1(1)\big)^2-\omega_1^2}{2}\Bigg]\sin\rho$$

$$-\big[\big(q_1(0)+q_1(1)\big)\omega_1+2\omega_2\big]cos\rho\Bigg\}+o\left(\frac{1}{\rho^3}exp(|Im\rho|x)\right),$$

$$|\rho|\to\infty. \tag{20}$$

Подставим (9) в (20) и положим $\Delta(\rho_n)=0$, тогда

$$\rho_n=\pi n+\frac{\omega_1-A_n^n}{2\pi n}+\frac{\omega_2}{2(\pi n)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{21}$$

Подставим (21) в (6), (19) мы получаем

$$
\begin{aligned}
\rho_n y_n(x) = sin\big(\pi n x - Q(x)\big) \\
& - \frac{1}{2\pi n}\Bigg\{\bigg[\Big[\int_0^x \big(q_0(t) + q_1^2(t)\big)dt - \omega_1 x\Big] cos\big(\pi n x - Q(x)\big) \\
& - \Big[q_1(0) + q_1(x)\, sin\big(\pi n x - Q(x)\big) \\
& - \Big[\int_0^x \big(q_0(t) + q_1^2(t)\big) cos(\,\pi n(x - 2t) - Q(x) + 2Q(t)\Big)\, dt \\
& + \int_0^x q'_1(t)\, sin\big(\rho(x - 2t) - Q(x) + 2Q(t)\big)\, dt \\
& - A_n^n x\, cos\big(\pi n x - Q(x)\big)\Big]\bigg]\Bigg\} \\
& - \frac{1}{(2\pi n)^2}\Bigg\{\bigg[\big(q_1(0) + q_1(x)\big)\bigg(\int_0^x (q_0(t) + q_1^2(t))dt - \omega_1 x\bigg) \\
& + 2\int_0^x (\,q_0(t) + q_1^2(t))q_1(t)dt - 2\omega_2 x\bigg] cos\big(\pi n x - Q(x)\big) - q_1^2(0) \\
& + q_1^2(x) + \omega_1 x \int_0^x (q_0(t) + q_1^2(t))dt + \frac{\big(q_1(0) + q_1(x)\big)^2 - x^2\omega_1^2}{2} \\
& - \frac{1}{2}\bigg(\int_0^x \big(q_0(t) + q_1^2(t)\big)dt\bigg)^2 sin\big(\pi n x - Q(x)\big)\Bigg\} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), |n| \\
& \to \infty \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Равномерно по $x \in [0,1]$. Подставляя (16) в (22) и с учетом (15), $S\big(x_n^j, \rho_n\big) = 0$, получаем (17).

Теорема единственности. Решение обратной узловой задачи. Рассмотрим следующую узловую задачу.

Задача 1. По заданному множеству узловых точек X, найти функции $q_0(x), q_1(x)$.

Здесь и далее “множество узловых точек” понимается с учетом их нумерации. Другими словами, $\{x_n^j\}_{(n,j)\in I} = \{\tilde{x}_n^j\}_{(n,j)\in \tilde{I}}$ тогда, и только тогда, когда $x_n^j = \tilde{x}_n^j$ и $I = \tilde{I}$ для всех $(n,j) \in I$.

Обозначим

$$\tilde{A}_n^j = \int_0^{x_n^j} (\tilde{p}(t) + q_1^2(t)) \cos\big(2\pi nt - 2Q(t)\big)\, dt$$

$$- \int_0^{x_n^j} (q_1'(t) \sin\big(2\pi nt - 2Q(t)\big)\, dt,$$

где $\tilde{p}(t) = \int_0^1 q_0(t)\, dt$.

Из (18) получаем

$$A_n^j = \tilde{A}_n^j + o\left(\frac{1}{n}\right), |n| \to \infty,$$

Равномерно по j. Следующее утверждение является следствием теоремы 2.

Лемма 1. Зафиксируем $x \in [0,1]$. Выберем $\{j_n\}$ так чтобы $x_n^{j_n} \to x$ при $|n| \to \infty$. Тогда существуют конечные пределы и выполняются следующие тождества:

$$Q(x) = \pi \lim_{|n|\to\infty} (nx_n^{j_n} - j_n), \tag{23}$$

$$f(x) \coloneqq 2\pi \lim_{|n|\to\infty} n(\pi(nx_n^{j_n} - j_n) - Q\big(x_n^{j_n}\big)), \tag{24}$$

$$g(x) \coloneqq \pi \lim_{|n|\to\infty} n(\, 2\pi n(\pi n x_n^{j_n} - \pi j_n - \, Q\big(x_n^{j_n}\big) - f\big(x_n^{j_n}\big) + \tilde{A}_n^{j_n} - \tilde{A}_n^n x_n^{j_n}) \tag{25}$$

и

$$f(x) = \int_0^x (q_0(t) + q_1^2(t))dt - x\int_0^1 (q_0(t) + q_1^2(t))dt, \tag{26}$$

$$g(x) = \int_0^x (q_0(t) + q_1^2(t))q_1(t)dt - x\int_0^1 (q_0(t) + q_1^2(t))q_1(t)dt, \tag{27}$$

Докажем теорему единственности решения задачи 1.

Алгоритм I.

Теорема 3.

Задание всюду плотного множества узлов однозначно определяет функции $q_0(x), q_1(x)$ которые могут быть найдены с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 1. Пусть задано всюду плотное множество узлов $X \subset X_0$. Тогда

I. Для каждого $x \in [0,1]$ выбираем последовательность $\{x_n^{j_n}\} \subset X_0$ такую что $x_n^{j_n} \to x$ при $|n| \to \infty$;

II. Найдем функцию $Q(x)$ по формуле (23) и вычисляем

$$q_1(x) = Q'(x); \tag{28}$$

III. Находим $f(x)$ по формуле (24) и получаем

$$p(x) = f'(x) - q_1^2(x) + \int_0^1 q_1^2(t)\,dt; \tag{29}$$

IV. Фиксируем произвольное $x \in [0,1]$ такое что $Q(x) \neq 0$, находим $g(x)$ по формуле (25) и вычисляем

$$A = \frac{1}{Q(x)} g(x) - \left(\int_0^x (p(t) + q_1^2(t))\, q_1(t)dt + x \int_0^1 \left(p(t) + q_1^2(t)\right) q_1(t)dt\right); \tag{30}$$

V. Находим функцию $q_0(x)$ по формуле

$$q_0(x) = p(x) + A. \tag{31}$$

Доказательство. Формула (28) следует из (5). Далее дифференцируя (26) и сравнивая полученное выражение с (29) получаем

$$q_0(x) = p(x) + \int_0^1 q_0(t)\,dt.$$

Подставляя в (27) и учитывая (3) получаем:

$$g(x) = \int_0^x (p(t) + q_1^2(t))q_1(t)dt - x\int_0^1 (p(t) + q_1^2(t))q_1(t)dt + Q(x)\int_0^1 q_0(t)\,dt,$$

Согласно (4) существует $x \in [0,1]$ такой что $Q(x) \neq 0$. Сравнивая последнее соотношение с (30) получаем

$$A=\int_0^1 q_0(t)\,dt$$

Которое содержит формула (31).

Алгоритм II. Рассмотрим альтернативный алгоритм с использованием понятия узловой длины $l_n^j\coloneqq x_n^{j+1}-x_n^j$, который позволяет построить приближение $q_0(x),q_1(x)$ непосредственно, не через их элементарные функции.

Рассмотрим функцию $j_n(x)$:

$$j_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ max\,j\,, \quad x_n^j<x, & x\in(0,1]\end{cases} \qquad n>0,$$

$$j_n(x)=\begin{cases}-1, & x=0\\ \max j, \quad x_n^j\ge x; & x\in(0,1],\end{cases} \qquad n<0.$$

$$x_n^{j_n(x)}\to x,|n|\to\infty.$$

Лемма 2.

Существует конечный предел и соответствующее равенство:

$$q_1(x)=\pi\lim_{|n|\to\infty} n(n\,l_n^j-1). \qquad (32)$$

Более того, для почти всех $x\in(0,1)$ существует конечный предел

$$v(x)\coloneqq 2\pi\lim_{|n|\to\infty} n^2\left(\pi n l_n^j-\pi-\int_{x_n^{j_n(x)}}^{x_n^{j_n(x)}+1} q_1(t)dt\right) \qquad (33)$$

и

$$v(x)=q_0(x)-\int_0^1 q_0(t)dt+q_1^2(x)-\int_0^1 q_1^2(t)dt. \qquad (34)$$

Доказательство. Из (16), (17) получаем

$$l_n^j=\frac{1}{n}+\frac{1}{\pi n}\int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} q_1(t)dt+o\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n=\frac{1}{l_n^j}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\pi n(nl_n^j - 1) = n\int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} q_1(t)dt + o(1) = q_1\left(\xi_n^j\right) + o(1), \qquad \xi_n^j \in (x_n^j, x_n^{j+1}).$$

Если $x_n^j \to x$, тогда $q_1\left(\xi_n^j\right) \to q_1(x)$, и (32) доказано.

В дальнейшем получаем, что для каждой функции $f(x) \in L(0,1)$

$$\int_{x_n^{j_n(x)}}^{x_n^{j_n(x)+1}} f(t)\cos(2\pi nt)\,dt, \int_{x_n^{j_n(x)}}^{x_n^{j_n(x)+1}} f(t)\sin(2\pi nt)dt = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

Следовательно $n(A_n^{j_n(x)+1} - A_n^{j_n(x)}) = o(1)$.

$$l_n^{j_n(x)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\pi n}\int_{x_n^{j_n(x)}}^{x_n^{j_n(x)+1}} q_1(t)dt + \frac{1}{2(\pi n)^2}\int_{x_n^{j_n(x)}}^{x_n^{j_n(x)+1}} (q_0(t) + q_1^2(t) - \omega_1)dt + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$\frac{1}{l_n^j} = n + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

И, для всех точек Лебега $f(x) \in L(0,1)$,

$$\frac{1}{l_n^{j_n(x)}}\int_{x_n^{j_n(x)}}^{x_n^{j_n(x)+1}} f(t)dt = f(x) + o(1),$$

Получаем

$$n\int_{x_n^{j_n(x)}}^{x_n^{j_n(x)+1}} f(t)dt = f(x) + o(1).$$

Отсюда получаем (33) и (34).

Таким образом переходим ко второму алгоритму решения задачи 1, который в отличии от первого алгоритма не содержит дифференцирования.

Алгоритм 2. Пусть задано множество узловых точек X. Тогда

I. Находим $q_1(x)$ по формуле (32);

II. Вычисляем $v(x)$ по формуле (33) и находим функцию

$$p(x) = v(x) - q_1^2(x) + \int_0^1 q_1^2(t)dt;$$

III. Находим $A = \int_0^1 q_0(t)\,dt$, так, как это сделано в первом алгоритме и

Заключение. Узловые задачи состоят в восстановлении операторов по нулям их собственных функций. С физической точки зрения это соответствует нахождению, например, плотности струны.

Дифференциальные уравнения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра часто появляются как в математике, так и в приложениях, например, оператор диффузии. В настоящей работе мы рассмотрели обратную узловую задачу для дифференциального пучка, а также алгоритмы решения поставленной задачи.