Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

__**Обобщённые интегральные преобразования в классе $L_2$**______
название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом
_____________________________________________________________

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки)__4_ __ курса __411__группы

направления _01.03.02 – Прикладная математика и информатика___________
код и наименование направления
________________механико-математического факультета_________________
наименование факультета, института, колледжа
_________________Калаганова Михаила Валерьевича____________________
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
Старший преподаватель_ ___________________ С.Ю. Советникова
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., профессор_____ ___________________ ___В.А. Юрко____
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Саратов, 2018 год

## Введение.

Данная работа посвящена изучению некоторых вопросов теории интегральных преобразований в комплексной области и проблемы параметрического представления различных классов аналитических функций. Хорошо известна теория интегральных преобразований Фурье и Ватсона(как специального преобразования Меллина) и теория, развитая М.М.Джрбащяном, в стремлении найти некоторое среднее преобразование, имеющее характерные признаки указанных двух - преобразование с ядрами, выражаемыми с помощью функций типа Миттаг-Леффлёра и её континуальными аналогами – функциями Вольтерра. Однако в отличие от преобразований Фурье и Ватсона, где прямые и обратные интегральные преобразования выражаются сходными ядрами, преобразование с ядрами Миттаг-Леффлёра и Вольтерра требует обратного преобразования с ядрами типа преобразования Фурье и наоборот, то есть, преобразование Фурье обращается посредством преобразований с ядрами Миттаг-Леффлёра.

В данной работе в качестве проблемы, требующей дальнейшего исследования, предложен несколько иной подход, а именно, С.Н.Кабановым было замечено, что ядра преобразований Фурье и Ватсона являются собственными функциями соответствующих операторов первого порядка, порождённых самосопряжёнными дифференциальными выражениями, и соответствуют случаям коэффициентов дифференциального выражения равных единице и x соответственно. В этой связи была поставлена задача выяснить, какому потенциально возможному интегральному преобразованию соответствует некий промежуточный случай, а именно дробно-степенной случай коэффициента самосопряжённого дифференциального выражения. Оказалось, что этот случай в частном значении параметров соответствует главной части асимптотического представления ядра Миттаг-Леффлёра, а само интегральное преобразование Миттаг-Леффлёра является в определённом смысле неким средним между преобразованиями Фурье и Ватсона, так как в асимптотическом представлении Функций типа Миттаг-Леффлёра содержатся как экспоненциальные, так и степенные слагаемые. В работе приведены краткие элементы теории интегральных преобразований Фурье и Ватсона, необходимые асимптотические представления функций типа Миттаг-Леффлёра и некоторые вычисления в пользу указанных выше предположений.

Целью данной рабыоты было установление связи между преобразованиями Фурье, Ватсона и Миттаг-Леффлёра.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, четырёх разделов и списка использованных источников.

В первом разделе приводится доказательство фундаментальной теоремы Планшереля о построении и основных свойствах оператора Фурье для функций класса $L_2(-\infty, +\infty)$. Кроме того, будут приведены некоторые типичные теоремы о свёрстке, сходимости и суммируемости преобразований Фурье в классе $L_2$.

Во втором разделе излагаются теоремы об обобщённых интегральных преобразованиях с ядрами типа Фурье-Ватсона в классах $L_2(0, +\infty)$, известные под названием теорем Ватсона, при этом приводится также ряд важных примеров таких ядер.

В третьем разделе приводится обобщение теоремы Ватсона на случай неортогональных ядер. Приводятся приемры биортогональных функций ядер Фурье-Ватсона.

В четвёртом разделе рассматриваются различные собственные функции дифееренциальных операторов, порождённых самосопряженным дифференциальным выражением первого порядка, представляющие собой ядра различных интегральных преобразований.

## Основное содержание работы.

**1.Преобразование Фурье в классе $L_2$.** В этом пункте приводится доказательство фундаментальной теоремы Планшереля о построении и основных свойствах оператора Фурье для функций класса $L_2(-\infty, +\infty)$.

**1.1(a) Теорема 1.1.** Пусть $f(x)$ - произвольная функция из класса $L_2(-\infty, +\infty)$. Тогда:

1°. Формула

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{du} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{e^{-iut} - 1}{-it} dt \tag{1}$$

почти всюду на всей оси $(-\infty, +\infty)$ определяет функцию $F(u) \equiv \mathscr{F}[f] \in L_2(-\infty, +\infty)$. Двойственная формула

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(u) \frac{e^{ixu} - 1}{iu} du \tag{2}$$

также справедлива почти всюду.

Кроме того, для пары функций $f(x)$ и $F(u) = \mathscr{F}[f]$ имеет место равенство Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2 \, du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx. \tag{3}$$

2°. Преобразование Фурье $F(u) = \mathscr{F}[f]$ и его обращение $f(x) = \mathscr{F}^{-1}[f]$, задаваемые соответственно формулами (1) и (2), могут быть определены также предельными соотношениями

$$F(u) = \underset{\sigma \to +\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{+\sigma} f(t) e^{-iut} dt, \tag{4}$$

$$f(x) = \underset{\sigma \to +\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{+\sigma} F(u) e^{ixu} du. \tag{5}$$

$3^\circ$. Если $g(x)$ - произвольная функция из класса $L_2(-\infty, +\infty)$ и

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{du} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{e^{-iut} - 1}{-it} dt, \tag{6}$$

то для пары функций $f(x)$ и $g(x)$ и их преобразований $F(u)$ и $G(u)$ имеет место обобщённое равенство Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(u)\overline{G(u)}du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{7}$$

**(б)** Обобщённое равенство Парсеваля (7) допускает дальнейшее обобщение.

**Теорема 1.2**. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу $L_2(-\infty, +\infty)$, причём $F(u) = \mathscr{F}[f], \;\; G(u) = \mathscr{F}[g]$. Тогда:

$1^\circ$. Свёртка функций $f(x)$ и $g(x)$, т.е. интеграл

$$k(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy, \tag{8}$$

существует при любом $x$ и является непрерывной функцией от $x$, стремящейся к нулю при $x \to \pm\infty$; при этом

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |k(x)| \leqslant \|f\|_2 \, \|g\|_2 \, . \tag{9}$$

$2^\circ$. Для всех $x$, $-\infty < x < +\infty$, справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(u)G(u)e^{ixu}du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy. \tag{10}$$

**1.2.** Приведём теперь некоторые предложения о сходимости в обычном смысле и о суммировании интегралов Фурье для функций из класса $L_2$.

**(а) Теорема 1.3.** Пусть функция $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ и в некоторой окрестности точки $t = x$ имеет ограниченное изменение. Если при этом $F(u) = \mathscr{F}[f]$, то справедлива формула обращения

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v.\,p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{ixu}du. \tag{11}$$

**(б)** Условимся говорить, что функции $K(x)$ и $H(x)$ составляют фейеровскую пару второго рода, $(K,H)\in\Phi_2$, если

1) $K(x)\in L_2(-\infty,+\infty), K(-x)=K(x)$;

2) $H(x)=\sqrt{2\pi}\mathscr{F}[K], \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}H(x)dx=1$;

3)$A=\sup\limits_{|x|<1}\{|H(x)|\}<+\infty,\ B=\sup\limits_{|x|>1}\{|x|^{\alpha}|H(x)|\}<+\infty \qquad (\alpha>1)$.

**Теорема 1.4.** Пусть $(K,H)\in\Phi_2, f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$ и функция $f_\sigma(x,K)$ определяется по формулам

$$f_\sigma(x,K)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(u)K(\frac{u}{\sigma})e^{ixu}du \tag{12}$$

и

$$f_\sigma(x,K)=\frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)H(\sigma t)dt=\frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)H(\sigma t)dt. \tag{13}$$

Тогда:

$1^\circ$. В любой точке $x\in(-\infty,+\infty)$, для которой

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int\limits_{-0}^{h}|\phi_x(t)|\,dt=0, \phi_x(t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x), \tag{14}$$

справедливо равенство

$$\lim_{\sigma\to+\infty}f_\sigma(x,K)=f(x). \tag{15}$$

$2^\circ$.Если $f(x)$ непрерывна на промежутке $(a,b)$, то стремление к пределу в (15) имеет место равномерно на любом отрезке $[a_1,b_1]\subset(a,b)$.

**(в)** Из доказанной теоремы, в частности, вытекает

**Теорема 1.5.** Пусть $f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$ и $F(u)=\mathscr{F}[f]$. Тогда

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\sigma\to+\infty}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left(1-\frac{|u|}{\sigma}\right)F(u)e^{ixu}du$$

для всякой точки $x$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right|dt=0,$$

т.е. почти всюду на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

**1.3** Следующие предложения вытекают из теоремы Планшереля.

**Теорема 1.6.** Пусть $x^{k-\frac{1}{2}}f(x) \in L_2(0, +\infty)$. Тогда:

$1^\circ$. Функции

$$\mathscr{F}(s, a) = \int\limits_{1/a}^{a} f(x)x^{s-1}dx \qquad (\text{Re } s = k) \tag{16}$$

при $a \to +\infty$ сходятся в среднем на прямой $(k - i\infty, k + i\infty)$, т.е. существует функция $\mathscr{F}(s) \in L_2(k - i\infty, k + i\infty)$ такая, что

$$\underset{a \to +\infty}{\text{l.i.m.}} \int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} |\mathscr{F}(s) - \mathscr{F}(s, a)|^2 \, |ds| = 0. \tag{17}$$

$2^\circ$. Функции

$$f(x, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-ia}^{k+ia} \mathscr{F}(s)x^{-s}ds \qquad (0 < x < +\infty) \tag{18}$$

при $a \to +\infty$ сходятся в среднем к функции $f(x)$ с весом $x^{2k-1}$ на полуоси $(0, +\infty)$, т.е.

$$\underset{a \to +\infty}{\text{l.i.m.}} \int\limits_{0}^{+\infty} |f(x) - f(x, a)|^2 \, x^{2k-1}dx = 0. \tag{19}$$

причём почти всюду на $(0, +\infty)$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx} \int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathscr{F}(s) \frac{x^{1-s}}{1-s} ds. \tag{20}$$

$3^\circ$. Справедливо равенство

$$\int\limits_{0}^{+\infty} |f(x)|^2 \, x^{2k-1}dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathscr{F}(k + it)|^2 \, dt. \tag{21}$$

$4^\circ$. Обратно, для любой функции $\mathscr{F}(s) \in L_2(k - i\infty, k + i\infty)$ функции (18) при $a \to +\infty$ сходятся в среднем в смысле (19) к некоторой функции

$f(x) \in L_2(0,+\infty)$, представимой в виде (20). Функции же (16) при $a \to +\infty$ сходятся к $\mathscr{F}(s)$ в смысле (17), причём опять имеет место равенство (21).

**Теорема 1.7** Пусть $x^{k-\frac{1}{2}}f(x) \in L_2(0,+\infty)$, $x^{\frac{1}{2}-k}g(x) \in L_2(0,+\infty)$, причём

$$\begin{gathered}\mathscr{F}(k+it) = \underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int\limits_{1/a}^{a} f(x)x^{k+it-1}dx, \\ \mathscr{G}(1-k+it) = \underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int\limits_{1/a}^{a} g(x)x^{-k+it}dx.\end{gathered} \tag{22}$$

Тогда имеет место равенство

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathscr{F}(s)\mathscr{G}(1-s)ds. \tag{23}$$

**2.Преобразование Ватсона.** Ватсон первый построил теорию обобщенных интегральных преобразований с ядрами Фурье в классах $L_2$. В настоящем пункте излагается теорема Ватсона и некоторые её применения.

**2.1.(a)** Условимся говорить, что функции $\varphi(x) \in L_2(0,+\infty)$ и $\Phi\left(\frac{1}{2}+it\right) \in L_2(-\infty,+\infty)$ двойственны по Меллину, если соотношения

$$\Phi\left(\frac{1}{2}+it\right) = \underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int\limits_{1/a}^{a} \varphi(x)x^{s-1}dx \ \left(s=\frac{1}{2}+it\right), \tag{24}$$

$$\varphi(x) = \underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\sigma}^{\frac{1}{2}+i\sigma} \Phi(s)x^{-s}ds \tag{25}$$

выполняются в смысле теоремы 1.6.

**Лемма 1.1.** Пусть функции

$$\frac{k(x)}{x} \in L_2(0,+\infty) \ \text{ и } \ \frac{K(s)}{1-s} \in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty, \frac{1}{2}+i\infty\right) \tag{26}$$

двойственны по Меллину. Тогда условие

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{k(\xi x)\overline{k(\eta x)}}{x^2}dx = min(\xi,\eta) \qquad (\xi>0, \eta>0) \tag{27}$$

и условие

$$\left|K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|=1 \qquad (-\infty<t<+\infty) \tag{28}$$

эквивалентны.

**(б)** Назовём функцию $k(x)$ ядром типа Фурье-Ватсона, если

$$\begin{aligned} &1)\frac{k(x)}{x}\in L_2(0,+\infty),\\ &2)\int\limits_0^{+\infty}\frac{k(\xi x)\overline{k(\eta x)}}{x^2}dx=min\{\xi,\eta\} \qquad (\xi>0,\eta>0). \end{aligned} \tag{29}$$

Доказанную выше лемму можно переформулировать следующим образом. **Лемма 1.1'.** Класс $W_0$ всех ядер $k(x)$ типа Фурье-Ватсона совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$k(x)=x\ \underset{\sigma\to+\infty}{1.i.m.}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\frac{e^{i\psi(t)}}{\frac{1}{2}-it}x^{-\frac{1}{2}-it}dt. \tag{30}$$

где $\psi(t)$ - произвольная вещественная измеримая функция.

**(в)**Докажем теперь теорему Ватсона.

**Теорема 2.1**. 1°. Пусть функция $k(x)$ является ядром типа Фурье-Ватсона, т.е.

$$\begin{aligned} &\frac{k(x)}{x}\in L_2(0,+\infty),\\ &\int\limits_0^{+\infty}\frac{k(\xi x)\overline{k(\eta x)}}{x^2}dx=min(\xi,\eta) \qquad (\xi>0,\eta>0). \end{aligned} \tag{31}$$

Тогда для любой функции $f(x)\in L_2(0,+\infty)$ формула

$$g(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_0^{+\infty}\overline{\frac{k(xu)}{u}}f(u)du, \qquad x\in(0,+\infty), \tag{32}$$

определяет почти всюду функцию $g(x)$ также из класса $L_2(0,+\infty)$.

Двойственная формула

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_0^{+\infty}\frac{k(xu)}{u}g(u)du, \qquad x\in(0,+\infty), \tag{33}$$

также справедлива почти всюду, причём имеет место равенство

$$\int_{0}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{0}^{+\infty} |g(x)|^2 dx. \tag{34}$$

$2^{\circ}$. Обратно, если двойственные формулы (32), (33) верны для любой функции $f(x) \in L_2(0, +\infty$, то функция $k(x)$ является ядром типа Фурье-Ватсона.

**(г)** В этом пункте приводится следствие из теоремы 2.1.

**(д)** Отметим также ещё одно предложение, позволяющее образовать новые ядра типа Фурье-Ватсона.

**Теорема 2.2.** Пусть функции $k(x)$ и $l(x)$ являются ядрами типа Фурье-Ватсона, т.е. $\frac{k(x)}{x}$ и $\frac{l(x)}{x}$ принадлежат классу $L_2(0, +\infty)$ и, кроме того,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{k(\xi x)\overline{k(\eta x)}}{x^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{l(\xi x)\overline{l(\eta x)}}{x^2} dx = min(\xi, \eta) \quad (\xi > 0, \eta > 0).$$

Если $m\left(\frac{1}{x}\right)$ есть $l$-преобразование функции $\frac{k(x)}{x}$, т.е. почти всюду

$$m\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx} \int_{0}^{+\infty} \frac{\overline{l(xu)}}{u} \frac{k(u)}{u} du, \quad x \in (0, +\infty), \tag{35}$$

то функция $m(x)$ также является ядром Фурье-Ватсона.

**2.2.** Используя теорему Ватсона 2.1 или теорему 2.2, можно получить ряд известных из анализа интегральных преобразований.

(**а**) Косинус- и синус- преобразования Фурье-Планшереля.

(**б**) Преобразование Гильберта на полуоси $(0, +\infty)$.

(**в**) Преобразование Ханкеля.

**3.Биортогональные преобразования Ватсона.** В настоящем пункте приводится обобщение теоремы Ватсона на случай неортогональных ядер.

**3.1.(а)** Пусть функции

$$\frac{k(x)}{x} \in L_2(0, +\infty) \;\text{ и }\; \frac{K(s)}{1-s} \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right), \tag{36}$$

а также функции

$$\frac{h(x)}{x} \in L_2(0,+\infty) \;\; \text{и} \;\; \frac{H(s)}{1-s} \in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty, \frac{1}{2}+i\infty\right), \tag{37}$$

двойственны по Меллину.

Тогда, как и выше (лемма 1.1), легко установить, что условие

$$\int_0^{+\infty} \frac{k(\xi x)\overline{k(\eta x)}}{x^2} dx = min(\xi,\eta) \;\; (\xi > 0, \eta > 0) \tag{38}$$

и условие

$$K(s)H(1-s) = 1 \qquad \left(\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}\right) \tag{39}$$

эквивалентны.

(б) **Теорема 3.1.** Пусть двойственные по Меллину функции (36) и (37) таковы, что выполняется условие (38) и, кроме того, имеем также

$$\begin{aligned} \sup_{-\infty<t<+\infty} \left| K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \leqslant A(k) < +\infty, \\ \sup_{-\infty<t<+\infty} \left| H\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \leqslant B(h) < +\infty. \end{aligned} \tag{40}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Для любой функции $f(x) \in L_2(0,+\infty)$ формулы

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} \frac{k(xu)}{u} f(u)du, \\ g_h(x) &= \frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} \frac{h(xu)}{u} f(u)du, \qquad x \in (0,+\infty), \end{aligned} \tag{41}$$

определяют почти всюду функции $g_k(x)$ и $g_h(x)$, принадлежащие классу $L_2(0,+\infty)$.

Двойственные формулы

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} \frac{h(xu)}{u} g_k(u)du, \\ f(x) &= \frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} \frac{k(xu)}{u} g_h(u)du, \qquad x \in (0,+\infty), \end{aligned} \tag{42}$$

также имеют место почти всюду.

2°. Справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\int\limits_0^{+\infty} g_k(x)g_h(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^2dx, \qquad (43)$$

а также неравенства

$$\begin{aligned} B^{-1}(h)\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^2dx \leqslant \int\limits_0^{+\infty} |g_k(x)|^2dx \leqslant A(k)\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^2dx, \\ A^{-1}(k)\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^2dx \leqslant \int\limits_0^{+\infty} |g_h(x)|^2dx \leqslant B(h)\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^2dx, \end{aligned} \qquad (44)$$

(**в**) В этом пункте приводится следствие из теоремы 3.1.

**3.2.** Далее приводятся примеры биортогональных функций ядер Фурье-Ватсона.

(**а**) Преобразования типа Гильберта.

(**б**)Гипергеометрические ядра.

**Преобразование с ядрами Миттаг-Леффлёра как "промежуточное"между преобразованиями с ядрами Фурье и Ватсона.** В данной работе предлогается общий взгляд на интегральные преобразования в комплексной области. Этот подход выделяет ядра различных интегральных преобразований по следующему принципу.

Каждое такое ядро представляет собой собственную функцию дифференциального оператора, порождённого самосопряжённым дифференциальным выражением 1-ого порядка.

Рассмотрим общий вид самосопряжённого дифференциального выражения нечётного порядка (в нашем случае 1-ого порядка) представимый в виде

$$l_{2\nu-1}(y) = \frac{1}{2}\left[(ipy^{(\nu-1)})^{(\nu)} + (ipy^{(\nu)})^{(\nu-1)}\right] \qquad (45)$$

где $p = p(x)$.

Положив в (45) $\nu = 1$, получим

$$l_1(y) = i(py' + \frac{1}{2}p'y); \tag{46}$$

Рассмотрим 3 случая:

1) Положим в (46) $p(x) \equiv 1$. Зная, что решение представимо в виде $l_1(y) = \lambda(y)$ получаем, что собственная функция имеет вид $y(x) = e^{-i\lambda x}$, а это есть известное ядро преобразования Фурье.

2) Рассмотрим случай, когда $p(x) = x$. Получаем что $y(x) = x^{-s}$, где $s = \frac{1}{2} + i\lambda$. Легко показать, что в этом случае решение дифференциального уравнения это ядро преобразования Ватсона.

Целью данной работы было рассмотрение промежуточного случая, где $p(x) = x^{\alpha}$. Отметим, что случай при $\alpha = 0$ соответствует преобразованию Фурье, а $\alpha = 1$ соответствует случаю преобразования Ватсона.

3) Легко показать что в случае $p(x) = x^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$ собственная функция оператора $l_1(y) = i(py' + \frac{1}{2}p'y)$ имеет вид

$$y = Cx^{-\frac{1}{2}\alpha}e^{-i\lambda\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \tag{47}$$

Вид этой функции совпадает с главной частью асимптотического представления функции Митагг-Лефлёра.

$$E_{\rho}(z, \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)}e^{z^{\rho}} - \sum_{k=1}^{\rho} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k\rho^{-1})} + O\left(|z|^{-1-\rho}\right)$$

## Заключение

Таким образом в определённом смысле преобразования с ядрами типа Митагг-Леффлёра могут играть переходную роль от преобразования Фурье к преобразованию Ватсона. Также можно заметить, что источником обобщённого интегрального преобразования являются собственные функции самосопряжённого дифференциального выражения первого порядка.