МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики
и вычислительной математики

Методы решения задач теплопроводности

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика

механико-математический факультет

Ганженко Кирилла Владимировича

Научный руководитель
ст. преподаватель ______________________ С.Ю.Советникова

Зав. кафедрой
профессор, д.ф-м.н. ______________________ В.А.Юрко

Саратов 2018

Введение Процессы теплопередачи играют исключительную роль в природе, и в современной технике. Исследования показывают, что теплопередача является сложным процессом. При изучении этот процесс разделяют на простые явления. Частным случаем является теплопроводность – перенос тепла при непосредственном соприкосновении тел или частей одного тела.

В настоящее время практика выдвигает перед учением о теплообмене новые и разнообразные задачи, требуя от инженера умения самостоятельно и творчески использовать основные законы и методы теплопередачи. Значительно расширилась возможность прикладного использования теории теплопроводности в связи со все более широким внедрением в инженерную практику быстродействующих ЭВМ. Многие задачи, недавно решавшиеся только узкими специалистами в области теории теплообмена, могут быть решены в условиях производства.

С одной стороны эта область науки достаточно хорошо разработана, получены надёжные данные, которые можно использовать при решении тех или иных конкретных задач, возникающих при проектировании и эксплуатации теплотехнического оборудования.; с другой, - проблемная, поскольку использование новых материалов, расширение диапазона действия теплотехнических устройств требует создание новых, более надёжных методов расчёта.

За последние десятилетия интерес к математическому моделированию сложных физических процессов и необходимость в нем заметно возросли. Этому в значительной мере способствует прогресс в развитии компьютерной техники, численных методов решения всех типов задач математической физики и реализуемых на этой основе математических моделей. Любая современная наукоемкая технология так или иначе использует результаты вычислительных экспериментов.

В данной работе для нестационарного уравнения теплопроводности проведено исследование различных методов решения как аналитических, так и численных.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка используемой литературы.

В первой главе рассматриваются физические задачи приводящие к уравнению теплопроводности. Также излагается постановка краевых задач, связанных с конфигурацией тела и условиями теплообмена.

Во второй главе обсуждаются аналитические методы решения задач теплопроводности, приводятся примеры.

В третьей главе исследуется общая теория разностных методов решения уравнения теплопроводности, устойчивость и сходимость соответствующих разностных схем.

Полученные результаты применяются к конкретной физической задаче – расчет температурного поля пластины, изложенной в четвертой главе.

Основное содержание работы Для решения задач, связанных с нахождением температурного поля, составляется дифференциальное уравнение теплопроводности. Под дифференциальным уравнением обычно понимают математическую зависимость, выражаемую дифференциальным уравнением между физическими величинами, характеризующими изучаемое явление, причем эти физические величины являются функциями пространства и времени. Такое уравнение описывает протекание физического явления в любой точке тела в любой момент времени.

Дифференциальное уравнение теплопроводности устанавливает зависимость между температурой, временем и координатами.

Предположим, что имеется одномерное температурное поле (тепло распространяется в одном направлении, например, в направлении оси x). Термические коэффициенты считаем независимыми от координат и времени.

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) дифференциальное уравнение теплопроводности для одномерного потока тепла. Если тепло распространяется по нормали к изометрическим поверхностям, то вектор q можно разложить на три составляющие по координатным осям. Количество аккумулированного элементарным объемом тепла будет равно сумме

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = a\nabla^2 T.$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Постановка краевой задачи. Совокупность начального и граничного условий называется краевыми условиями; начальное условие называется временным краевым условием, а граничное условие – пространственным краевым условием.

Начальное условие определяется заданием закона распределения температуры внутри тела в начальный момент времени, т. е. $T(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$, где $f(x, y, z)$ - известная функция.

Граничное условие может быть задано различными способами.

1. Граничное условие первого рода состоит в задании распределения температуры по поверхности тела в любой момент времени, т. е. $T_П(\tau) = f(\tau)$, где $T_П(\tau)$ - температура на поверхности тела.

1. Граничное условие второго рода состоит в задании плотности теплового потока для каждой точки поверхности тела как функции времени, т. е. $q_n(\tau) = f(\tau)$.

3. Граничное условие третьего рода характеризует закон конвективного теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой при постоянном потоке тепла (стационарное температурное поле). $q_П = \alpha(T_П - T_С)$

4. Граничное условие четвёртого рода соответствует теплообмену поверхности тела с окружающей средой (конвективный теплообмен тела с жидкостью) или теплообмену соприкасающихся твёрдых тел, когда температура соприкасающихся поверхностей одинакова. $T_П(\tau) = [T_С(\tau)]_П$.

2 Аналитические методы решения. Метод разделения переменных.
Классический метод решения дифференциального уравнения теплопроводности состоит в том, что находится совокупность частных решений T_n, удовлетворяющих уравнению и граничному условию, а затем по принципу наложения составляется ряд этих решений:

$$T = C_1T_1 + C_2T_2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} C_nT_n . \tag{2.1}$$

Коэффициенты C_n находятся из начального условия.

Частное решение T ищется в виде произведения двух функций, одна из которых $\theta(\tau)$ зависит только от времени τ, а другая $\vartheta(x, y, z)$ зависит только от координат, т. е.

$$T = C\theta(\tau)\vartheta(x, y, z), \tag{2.2}$$

где C – произвольная постоянная.

Если подставим решение (2.2) в уравнение (2.1), то получим

$$\frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)} = a\frac{\nabla^2\vartheta(x, y, z)}{\vartheta(x, y, z)}. \tag{2.3}$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности для неограниченной пластины имеет вид

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}. \tag{2.17}$$

Ищем частное решение этого уравнения в виде произведения двух функций:

$$T = C\theta(\tau)\vartheta(x).$$

Тогда после подстановки его в дифференциальное уравнение получим:

$$\frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)} = a\frac{\vartheta''(x)}{\vartheta(x)} = -ak^2. \tag{2.18}$$

Интегрирование уравнения

$$\frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)} = -ak^2 = const$$

даст значение для функции $\theta(\tau)$, т. е. $\theta(\tau) = e^{-ak^2\tau}$.
Дифференциальное уравнение для функции $\vartheta(x)$ имеет вид

$$\vartheta''(x) = -k^2\vartheta(x). \tag{2.19}$$

Общее решение уравнения (2.19) будет суммой частных решений:

$$\vartheta(x) = C\vartheta_1(x) + D\vartheta_2(x) = C\sin kx + D\cos kx, \tag{2.20}$$

где C и D - произвольные постоянные.

Второе частное решение $\vartheta_2(x) = \cos kx$ можно было получить также по формуле (2.14), зная первое решение $\vartheta_1(x) = \sin kx$, а именно

$$\vartheta_2(x) = \vartheta_1(x)\int \vartheta_1^{-2}(x)e^{-\int pdx}dx = \vartheta_1(x)\int \vartheta_1^{-2}(x)dx = \sin kx \times \int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k}\sin kx ctgkx = -\frac{1}{k}\cos kx$$

(в этом случае $p(x)$=0). Общее решение будет иметь тот же вид:

$$\vartheta(x) = C\vartheta_1(x) + D'(\vartheta_2) = C\sin kx - \frac{D'}{k}\cos kx = C\sin kx + D\cos kx,$$

где $D = -\frac{1}{k}D'$ - произвольная постоянная.

Частное решение дифференциального уравнения теплопроводности будет иметь вид

$$T(x,\tau) = C\sin kxe^{-ak^2\tau} + D\cos kxe^{-ak^2\tau}. \tag{2.21}$$

Постоянная k определяется из граничных, а постоянные C и D – из начальных условий; они принимают вполне определенные значения в зависимости от условий задачи. Подробно методика расчёта будет изложена при рассмотрении отдельных конкретных задач. Общее решение можно написать так: $T = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n x \exp(-ak_n^2\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \cos k_m x \exp(-ak_m^2\tau)$.

Метод преобразования Лапласа состоит в том, что изучается не сама функция, а её видоизменение. Это преобразование осуществляется при помощи умножения на экспоненциальную функцию и интегрирования её в определенных пределах. Интегральное преобразование $f_L(s)$ функции $f(\tau)$ определяется формулой

$$f_L(s) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = L[f(\tau)], \tag{2.23}$$

где $f(\tau)$ является оригиналом функции, а $f_L(s)$ - её изображением, которое обозначается в виде $L[f(\tau)]$. Здесь s может быть и комплексным числом, причём предполагается, что вещественная часть его будет положительной. Для того чтобы изображение существовало, интеграл (2.23) должен сходиться. Это накладывает определенные ограничения на функцию $f(\tau)$.

Если задача решена в изображениях, то нахождение оригинала по изображению (обратное преобразование) в общем случае выполняется по формуле обращения

$$[f(p)]_{F,H} = \int_0^\infty K(p,x) f(x) dx . \tag{2.41}$$

Конечные интегральные преобразования. Если граница интегрирования заключается между 0 и l, ядра конечных синус- и косинус-преобразований Фурье, а также преобразования Хенкеля соответственно имеют вид:

$$K(p,x) = \sin \frac{\mu x}{l}; \tag{2.47}$$

$$K(p,x) = \cos \frac{\mu x}{l} \tag{2.48}$$

(при граничных условиях первого и второго родов $\mu = n\pi$, а при граничных условиях третьего рода μ являются корнями уравнения $\mu tg\mu = \alpha l/\lambda$);

$$K(p,x) = rJ_\nu(\mu \frac{x}{l}), \tag{2.49}$$

где μ - корень уравнения $J_\nu(\mu) = 0$ (граничные условия первого рода), при граничных условиях третьего рода μ определяется из уравнения

$$J_\nu(\mu) = -\frac{\mu\lambda}{\alpha l} J'_\nu(\mu) . \tag{2.50}$$

Формула обращения обычно находится при помощи разложения функции в ряды по ортогональным функциям соответствующей задачи Штурма – Луивилля. Другими словами, ядром преобразования является функция Грина для данной задачи. Изображение функции *f(x)* получается с помощью интегрального преобразования

$$[f(p)]_G = \int_0^l K(p,x) f(x) dx , \tag{2.51}$$

а обратное преобразование по формуле (2.24), где вместо $[f(s)]_L$ следует подставить $[f(p)]_G$.

Метод конечных разностей основан на замене производных их приближенным значением, выраженным через разности значений функции в отдельных дискретных точках – узлах сетки. Дифференциальное уравнение в результате таких преобразований заменяется эквивалентным соотношением в конечных разностях, решение которого сводится к выполнению несложных алгебраических операций.

Приближенная замена первой и второй производных через разностные отношения выглядит следующим образом:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \qquad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности для изолированного тонкого стержня длиной L:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}, \ (0 \le x \le L).$$

Сводим задачу к уравнению $\vartheta_{i,k+1} = \left(1 - \frac{2la}{h^2}\right)\vartheta_{i,k} + \frac{la}{h^2}\left(\vartheta_{i-1,k} + \vartheta_{i+1,k}\right)$

Если $\lambda = \frac{k}{h^2}$, то разностное уравнение можно переписать так:

$$\vartheta_{i,k+1} = \lambda\vartheta_{i+1,k} + (1-2\lambda)\vartheta_{i,k} + \lambda\vartheta_{i-1,k}.$$

Расчёт температурного поля пластины. Рассмотрим практическую задачу, используемую в инженерных расчетах - распространение тепла в пластине с течением времени.

Условия задачи следующие: Определить нестационарные температурные поля в неограниченной пластине (алюминиевый сплав AM_{26}) с теплофизическими свойствами: $\rho = 2{,}2 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$, $\lambda = 1{,}33\, ккал/м\ \text{час град}$, $C = 0{,}2\, ккал/кг\ \text{град}$, если на одной поверхности, при x=L, задано изменение температуры со временем $T(x,t) = \beta t$, $\beta = 20\, град/сек$, а другая поверхность теплоизолирована. Толщина пластины: L=10 см. Начальное распределение на всей пластине равно $0^0 C$.

Для начала сформулируем задачу в дифференциальном виде. Так как распространение тепла фактически происходит по одной координатной оси, то уравнение теплопроводности будет одномерным:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}, \qquad (4.1)$$

где a – коэффициент теплопроводности определятся теплофизическими свойствами тела $a = \frac{k}{c\rho}$.

Начальные условия:

$$T(x,0)=0. \tag{4.2}$$

Граничные условия:

$$T(L,t)=20t, \tag{4.3}$$

$$T(0,t)=0. \tag{4.4}$$

Формула (4.4) – описывает теплоизолированную поверхность, где нулевой слой взят за пределами пластины и на этом слое температура всегда равна $0^0 C$.

Решение данной задачи аналитическими методами является нецелесообразным, так как мы ставили перед собой цель найти простое практическое решение применимое при инженерных расчетах и желательно поддающиеся программированию на ЭВМ. Например, решая задачу методом разделения переменных, мы получаем довольно громоздкое решение:

$$T(x,\tau)=\frac{2}{L}\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{a(2n+1)\pi^2 t}{4L}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{(2n+1)\pi a(-1)^n}{2L}\cdot\int_0^L 20t\exp\frac{a(2n+1)\pi^2 t}{4L}dx\right).$$

А решение в интегральной форме приводилось выше, и имело менее громоздкий результат (п. 2.3, формулы (2.36)-(2.39)), но имело существенный минус, так как довольно сложно составить программу нахождения оригинала по изображению.

Для соблюдения поставленных критериев решения удобнее воспользоваться численными методами решения, в частности методом конечных разностей (МКР).

Составим задачу в конечно-разностном виде (по классической явной схеме). Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности и краевые условия перепишем следующим образом:

$$\frac{\vartheta_{i,k+1}-\vartheta_{i,k}}{l}=a\frac{\vartheta_{i+1,k}-2\vartheta_{i,k}+\vartheta_{i-1,k}}{h^2}. \tag{4.1a}$$

$$\vartheta_{i,0}=0; \tag{4.2a}$$

$$\vartheta_{L,k}=20k, \tag{4.3a}$$

$$\vartheta_{0,k}=0. \tag{4.4a}$$

при $\lambda\le 1/2$, где $\lambda=\dfrac{al}{h^2}$.

Данный метод обычно требует определенного количества однообразных вычислительных операций. Поэтому была разработана программа Progtepl на языке программирования Pascal, которая находит решение данной задачи (4.1)-(4.4).

Заключение В работе была рассмотрена математическая постановка задач нестационарной теплопроводности.

Изучены аналитические и приближенные методы решения линейных задач теплопроводности.

Сделан подробный обзор явных разностных схем, рассмотрены вопросы устойчивости и сходимости.

Показано, что нарушение условия устойчивости разностной схемы приводит к значительной погрешности, причём изменение температуры приобретает колебательный характер. Численное решение в этом случае теряет всякий физический смысл.