Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Двумерное дискретное преобразование Фурье

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 219 группы

направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Дмитриевой Анастасии Вячеславовны

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор ________________________ Лукомский С.Ф.

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор __________________________________ Прохоров Д.В.

Саратов 2018

Введение Научно-технический прогресс в различных областях жизни предъявляет новые качественные и количественные требования к сбору, хранению и обработке информации. Не представляется возможным достигнуть высокого роста производительности труда за счёт лишь традиционных информационных технологий, поэтому специалисты ведут работу по созданию новых информационных технологий, которые базируются на широком использовании достижений вычислительной техники, математических и прикладных научных дисциплин.

Для современных информационных технологий характерен быстрый рост количества задач, решаемых с помощью цифровых методов. Современные цифровые системы сбора и обработки информации используются автономно или входят в качестве подсистем в различные системы контроля и управления, моделирования и проектирования, автоматизации научных исследований, технической и медицинской диагностики и т.д.

Чаще всего в задачах цифровой обработки сигналов применяется метод дискретных ортогональных преобразований, суть которого состоит в том, что представление и обработка сигналов производится при использовании дискретного ортогонального базиса. Широкое применение дискретных ортогональных преобразований в цифровой обработке сигналов связано прежде всего с разработкой быстродействующих методов вычисления быстрых дискретных ортогональных преобразований и создании на их основе программно-аппаратных средств, позволяющих обеспечивать функционирование системы цифровой обработки сигналов в реальном масштабе времени.

Следует отметить, что формирование аппарата гармонического анализа и развитие классической спектральной теории напрямую связаны с тем фактом, что в теории цифровых сигналов долгое время преобладало разложение сигналов по тригонометрической системе функций. Сейчас идет интенсивная разработка обобщённой спектральной теории, предполагающей использование других дискретных базисов. Основой обобщённой спектральной теории является теория дискретных ортогональных преобразований.

Многие из первых дискретных ортогональных базисов были введены дискретизацией известных непрерывных систем базисных функций. Но равномерная дискретизация возможна не для всех непрерывных систем. Наиболее цифроориентированными оказались базисы тригонометрических функций, функций Уолша и Хаара.

В настоящее время теория дискретных ортогональных преобразований находится на высоком уровне развития. Различные теоретические и практические вопросы этой теории освещены в довольно обширной литературе.

В данной работе подробно рассмотрено дискретное преобразование Фурье – одно из наиболее широко применямых преобразований Фурье в алгоритмах цифровой обработки сигналов (его модификации применяются в сжатии звука в MP3, сжатии изображений в JPEG и др.), а также в других областях, связанных с анализом частот в дискретном (к примеру, оцифрованном аналоговом) сигнале. На вход дискретное преобразование Фурье требует дискретную функцию, но реальные физические процессы чаще всего описываются аналоговыми сигналами $f(t)$, причём с конечными интервалами наблюдения $t \in [a, b]$. Для преобразования аналогового сигнала в дискретный производится равномерная выборка значений функции f, определяющей аналоговый сигнал, с шагом дискретизации Δt. Тогда дискретный сигнал состоит из отсчётов $f_n = f(n + \Delta t), n = \overline{0, N-1}$. Дискретные преобразования Фурье помогают решать дифференциальные уравнения в частных производных и выполнять такие операции, как свёртки. Дискретные преобразования Фурье также активно используются в статистике, при анализе временных рядов.

В ряде случаев при обработке сигналов оказывается более удобным в качестве базисов разложения использовать такие системы функций, для которых коэффициенты разложения учитывают поведение исходной функции лишь в нескольких близкорасположенных точках. Использование такого базиса означает переход от частотного анализа к масштабному, т.е. функция $f(x)$ анализируется с помощью некоторой заданной математической функции, изменяемой по масштабу и сдвигу на некоторую величину.

Целью данной работы было рассмотрение и сравнение численных характеристик восстановленных данных с помощью различных дискретных ортогональных преобразований. В частности, сравнение численных характеристик быстрого дискретного двоичного и троичного преобразований Хаара.

Основная часть работы состоит из трёх разделов. Первый раздел: "Унитарные матрицы". Второй раздел: "Дискретные ряды Фурье". Третий раздел: "Системы Хаара". В первом разделе рассмотрены основные аспекты теории унитарных матриц. В частности сформулированны и доказаны основные свойства унитарных матриц. Во втором разделе работы подробно рассмотрены дискретные ряды Фурье, построено дискретное преобразование Фурье, сформулированны и доказаны его основные свойства. Во второй части работы также проиллюстрирована работа компьютерной программы, реализующей дискретное преобразование Фурье. В третьем разделе работы приводится определение троичной системы Хаара и исследуются свойства этой системы. Рассматривается алгоритм разложения ступенчатой функции с длиной ступеньки кратной степени 3 по троичной системе Хаара. Строится алгоритм быстрого преобразования по троичной системе Хаара. Полученный алгоритм применяется к изображению и проводится сравнительный анализ числовых характеристик восстановленных изображений по двоичной и по троичной системам Хаара.

Методы исследования. Методологическую основу теоретической части работы составляют основные положения и методы теории цифровой обработки сигналов, теории дискретных ортогональных преобразований, матричной алгебры. Экспериментальные исследования проведены с использованием математического моделирования на ЭВМ.

Актуальность работы. Рассмотренная в работе модификация дискретного преобразования Фурье сигнала – дискретное троичное преобразование Хаара ранее не изучалось в приложении к сжатию изображений. Действительнозначная троичная система Хаара была построена сравнительно недавно, и её свойства при использовании в обработке сигналов не были достаточно изучены. Ранее не проводился сравнительный анализ результатов восстановления изображений с помощью быстрых преобразований Хаара по троичной и по двоичным системам.

Основная часть

В первом разделе основной части работы были рассмотрены и доказаны следующие свойства унитарных матриц.

Свойство 1. Всякая унитарная матрица является нормальной:

$$A^*A = AA^* = E.$$

Свойство 2. Для того чтобы матрица A^* была унитарна необходимо и достаточно, чтобы была унитарна матрица A.

Свойство 3. Произведение двух унитарных матриц есть унитарная матрица.

Свойство 4. Унитарная матрица имеет определитель, равный по модулю единице.

Свойство 5. Если матрица A – унитарна, то из равенства $x = Ay$ следует, что $y = A^*x$.

Доказанные свойства унитарных матриц используются при доказательстве многих свойств дискретных рядов Фурье и построении алгоритмов дискретного преобразования Фурье и его модификаций.

Во втором разделе работы определена тригонометрическая система функций $\varphi_k(x) = e^{\frac{2\pi i}{N}kx}$, $k = 0, 1, .., N-1$, $X = \{\mathit{0}, \mathit{1}, .., N - \mathit{1}\}, N \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Рассмотрены её основные свойства.

Пусть $D(X) = \{f : X \to \mathbb{C}\}$ – множество функций, определенных на X со значениями в $\mathbb{C}$. Тогда коэффициенты дискретного разложения Фурье функции вычисляются с помощью следующей теоремы.

Основными теоремами второго раздела являются теоремы о разложении функции в дискретный ряд Фурье и о вычислении коэффициентов разложения.

Теорема 1. Если $f \in D(X)$, то $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} \widehat{f}(k) e_k(x)$.

Теорема 2. Если $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} c_k e_k(x)$, то $c_k = (f, e_k) = \widehat{f}(k)$.

Введем следующие обозначения

$$W = \begin{pmatrix} e_0(0) & e_0(1) & \dots & e_0(N-1) \\ e_1(0) & e_1(1) & \dots & e_1(N-1) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ e_{N-1}(0) & e_{N-1}(1) & \dots & e_{N-1}(N-1) \end{pmatrix}$$

$$c = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})^T$$

$$f = (f(0), f(1), \dots, f(N-1))^T.$$

В матричной форме утверждение теоремы 2 эквивалентно высказыванию: если имеет место равенство

$$f = Wc, \tag{1}$$

то $c = W^* f$.

Во втором разделе также подробно рассмотрены с доказательствами основные свойства дискретных рядов Фурье.

1. Для любого вещественного вектора $f = \overline{f}$ компонента $\hat{f}_0$ – вещественна, а

$$\hat{f}_k = \overline{\hat{f}_{N-k}}, \quad \forall k = \overline{1, N-1}.$$

2. Для любых векторов $f, g \in D(X)$ и чисел α, β:

$$(\alpha f + \beta g)\hat{} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$$

3. Пусть

$$f = (f(0), f(1), .., f(N-1))$$

$$f' = (f(N-1), f(0), f(1), .., f(N-2)).$$

Тогда

$$\hat{f}' = (\hat{f}'(0), \hat{f}'(1), .., \hat{f}'(N-1)),$$

где

$$\hat{f}'(k) = e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \hat{f}(k).$$

Определение 1. Дискретной свёрткой векторов $A = (a_0, a_1, .., a_{N-1})$ и $B = (b_0, b_1, .., b_{N-1})$ называют вектор $C = (c_0, c_1, .., c_{2N-1})$,

$$c_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^{N-1} a_{k-j} b_j,$$

$$a_l = b_l = 0, \forall l < 0, \quad l > N-1$$

4. Пусть

$$\check{A} = (a_0, .., a_{N-1}, 0, .., 0), \quad \check{B} = (b_0, .., b_{N-1}, 0, .., 0) -$$

вектора размерности $2N$;

$\hat{A} = (\hat{a}_0, .., \hat{a}_{2N-1})$, $\hat{B} = (\hat{b}_0, .., \hat{b}_{2N-1})$ – ДПФ векторов $\check{A}$ и $\check{B}$ соответственно.

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{j=0}^{2N-1} \check{a}_j e^{-\frac{2\pi i}{2N} kj}$$

$$\hat{b}_k = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{j=0}^{2N-1} \check{b}_j e^{-\frac{2\pi i}{2N} kj}.$$

Тогда ДПФ вектора свертки $\hat{C} = (\hat{c}_0, .., \hat{c}_{2N-1})$ векторов A и B определяется, как

$$\forall k, \hat{c}_k = \sqrt{2N} \hat{a}_k \hat{b}_k.$$

В заключительной части второго раздела работы приводится описание работы алгоритма прямого и обратного дискретного преобразования Фурье для одномерного случая. Алгоритм производит восстановление сигнала по коэффициентам разложения в ряд Фурье исходного сигнала при различном количестве ненулевых коэффициентов разложения.

В третьем разделе работы подробно рассмотрена модификация дискретного преобразования Фурье – преобразование по троичной системе Хаара. В частности, определена система Хаара и рассмотрены и доказаны её основные свойства.

На интервале $[0, 1)$ троичные функции Хаара определяется следующим образом:

$$\psi^{(0)}(x) \equiv 1, x \in [0, 1)$$

$$\psi^{(1)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, x \in [0, \frac{1}{3}) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, x \in [\frac{2}{3}, 1) \\ 0, x \notin [0, 1) \end{cases} \quad \psi^{(2)}(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \sqrt{\frac{3}{2}}, x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ -\sqrt{\frac{3}{2}}, x \in [\frac{2}{3}, 1) \\ 0, x \notin [0, 1) \end{cases}$$

В работе доказано, что данная система – ортонормированная.

По этим функциям строится система сжатий и свигов $\psi^{(j)}(x)$ по формулам

$$\psi^{(0)}(x) \equiv 1, x \in [0, 1)$$

$$\psi^{(l)}_{n,j}(x) = 3^{\frac{n}{2}}\psi^{(l)}(3^n x - j), l = 1, 2; \quad n = 0, 1, ..; \quad j = 0, 1, .., 3^n - 1.$$

Функции $\psi^{(l)}_{n,j}(x)$ определены на интервалах $\Delta^n_j = \left[\frac{j}{3^n}, \frac{j+1}{3^n}\right)$ и принимают постоянные значения на интервалах Δ^{n+1}_{3j}, Δ^{n+1}_{3j+1} и Δ^{n+1}_{3j+2}. Причем

$$\Delta^{n+1}_{3j} \sqcup \Delta^{n+1}_{3j+1} \sqcup \Delta^{n+1}_{3j+2} = \Delta^n_j.$$

Вне интервалов Δ^n_j функции $\psi^{(l)}_{n,j}(x)$ равны нулю.

Проводится доказательство того, что $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}_{k,j}, \psi^{(2)}_{k,j}$ – ортонормированный базис в $L_2[0, 1]$. Доказательство теоремы прямо следует из доказательства двух следующих теорем

Теорема 3. Функции $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}_{k,j}, \psi^{(2)}_{k,j}$ образуют ортономированную систему на $[0, 1)$.

Теорема 4. Система функций $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}_{k,j}, \psi^{(2)}_{k,j}$ – полна в $L_2[0, 1]$.

Основным результатом третьего раздела работы является следующая теорема

Теорема 5. Любую ступенчатую функцию, постоянную на троичных полуинтревалах $[\frac{j}{3^{n+1}}, \frac{j+1}{3^{n+1}})$, можно представить в виде линейной комбинации

$$c_0 + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{3^k-1} (c^{(1)}_{k,j}\psi^{(1)}_{k,j}(x) + c^{(2)}_{k,j}\psi^{(2)}_{k,j}(x)). \tag{2}$$

В следующем подразделе проводится построение быстрого преобразования Хаара.

Пусть $f^{(n+1)}(x)$ постоянна на полуинтервалах Δ^{n+1}_j ранга $n + 1$ и её значения на этих полуинтервалах равны $f^{(n+1)}_j$, где $(j = 0, 1, .., 3^{n+1} - 1)$. Тогда можно записать $f^{(n+1)}$ в виде

$$f^{(n+1)}(x) \quad = \quad f^{(n)}(x) \ + \ \sum_{j=0}^{3^n-1} c_{3^k+j}\psi_{3^k+j}(x) \ + \ \sum_{j=0}^{3^n-1} c_{2\cdot 3^k+j}\psi_{2\cdot 3^k+j}(x)) \quad (3)$$

Рассмотрим равенство 3 на Δ_j^n.

В каждой сумме в равенстве 3 на каждом отрезке Δ_j^n присутствует ровно по одному слагаемому. Поэтому при каждом $j = 0, 1, .., 3^n - 1$ получаем систему

$$\begin{cases} f_{3j}^{(n+1)} = f_j^{(n)} + 3^{\frac{n}{2}} c_{3^n+j} \cdot \sqrt{2} + 3^{\frac{n}{2}} c_{2\cdot 3^n+j} \cdot 0 \\ f_{3j+1}^{(n+1)} = f_j^{(n)} + 3^{\frac{n}{2}} c_{3^n+j} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 3^{\frac{n}{2}} c_{2\cdot 3^n+j} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \\ f_{3j+2}^{(n+1)} = f_j^{(n)} + 3^{\frac{n}{2}} c_{3^n+j} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 3^{\frac{n}{2}} c_{2\cdot 3^n+j} \cdot (-\sqrt{\frac{3}{2}}). \end{cases} \quad (4)$$

Решая эту систему находим

$$\begin{cases} f_j^{(n)} = \frac{1}{3} \cdot (f_{3j}^{(n+1)} + f_{3j+1}^{(n+1)} + f_{3j+2}^{(n+1)}) \\ c_{3^n+j} = \frac{1}{3\sqrt{2}\cdot 3^{\frac{n}{2}}}(2 \cdot f_{3j}^{(n+1)} - f_{3j+1}^{(n+1)} - f_{3j+2}^{(n+1)}) \\ c_{2\cdot 3^n+j} = \frac{1}{\sqrt{6}\cdot 3^{\frac{n}{2}}}(f_{3j+1}^{(n+1)} - f_{3j+2}^{(n+1)}) \end{cases}$$

Таким образом, мы нашли компоненты вектора разложения $\hat{f}$ с номерами больше $3^n - 1$:

$$c_{3^n+j} = \hat{f}(3^n + j)$$

$$c_{2\cdot 3^n+j} = \hat{f}(2 \cdot 3^n + j),$$

$$j = 0, 1, .., 3^n - 1.$$

Повторяем алгоритм 4 для $f_j^{(n)}$. Получим

$$\begin{cases} f_{3j}^{(n)} = f_j^{(n-1)} + 3^{\frac{n-1}{2}} c_{3^{n-1}+j} \cdot \sqrt{2} + 3^{\frac{n-1}{2}} c_{2\cdot 3^{n-1}+j} \cdot 0 \\ f_{3j+1}^{(n)} = f_j^{(n-1)} + 3^{\frac{n-1}{2}} c_{3^{n-1}+j} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 3^{\frac{n-1}{2}} c_{2\cdot 3^{n-1}+j} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \\ f_{3j+2}^{(n)} = f_j^{(n-1)} + 3^{\frac{n-1}{2}} c_{3^{n-1}+j} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 3^{\frac{n-1}{2}} c_{2\cdot 3^{n-1}+j} \cdot (-\sqrt{\frac{3}{2}}). \end{cases}$$

То есть на каждом полуинтервале Δ_j^n

$$f_j^{(n)} = f_j^{n-1} + \sum_{j=0}^{3^{n-1}-1} (c_{3^{n-1}+j} \cdot \psi_{3^{n-1}+j} + c_{2\cdot 3^{n-1}+j} \cdot 3^{n-1} + j).$$

Далее продолжаем алгоритм, уменьшая каждый раз n на единицу, пока этот параметр не станет равен 0. На каждом шаге алгоритма мы получаем $2 \cdot 3^n$ последних коэффициентов вектора разложения. Остальные коэффициенты подвергаются последующим изменениям.

На каждом шаге мы разбиваем обрабатываемый вектор на тройки, число которых уменьшается в связи с уменьшением длины обрабатываемого вектора.

В заключительной части работы рассмотрены реализации алгоритмов прямого и обратного быстрого троичного преобразования Хаара на языке $C\sharp$. Алгоритм был применен к изображению. Алгоритм преобразования изображения состоит из нескольких этапов.

На вход подается цветное изображение формата bmp. Далее изображение переводится из цветового пространства RGB в цветовое пространство YCbCr. Отдельно рассматриваются три составляющие изображения Y, Cr, Cb. Каждая из них разбивается на квадраты со стороной равной степени 3. Есть возможность выбора размера блоков преобразования (3 на 3, 9 на 9, 27 на 27, 81 на 81). В каждом блоке проводится быстрое преобразование Хаара сначала по строкам, потом по столбцам. Далее производится зануление заданного процента от общего количества полученных коэффициентов разложения. После чего проводится обратное преобразование Хаара в каждом блоке (сначала по столбцам, потом по строкам). Перед выводом картинки на экран проводится преобразование цветового пространства изображения из YCbCr в RGB. На выходе мы получаем восстановленную картинку и подсчитанные коэффициенты MSE (среднюю квадратичную ошибку) по каждой цветовой составляющей и коэффциент $PSNR$ (отношение пикового уровня сигнала к шуму) по составляющей яркости Y , где

$$MSE = \sum_{x=0}^{n} \sum_{y=0}^{m} |P(x,y) - T(x,y)|^2 \cdot \frac{1}{nm},$$

где $n \times m$ – размеры изображения, $P(x,y)$ – значение пиксела исходного изображения, а $T(x,y)$ – полученного.

$$PSNR = 10 \cdot \lg(\frac{255 \cdot 255}{MSE})$$

Получено, что в среднем значение величины $PSNR$ восстановленного изображения с помощью быстрого троичного преобразования Хаара выше, чем у двоичного преобразования. Величина MSE у троичного преобразования наоборот ниже, чем у двоичного. Отметим, что при обнулении 90% коэффициентов разложения компоненты Y и по 98% коэффициентов разложения компонент Cr и Cb детализированного изображения мы получаем при использовании троичного преобразования Хаара изображение с PSNR>30, что свидетельствует о том, что восстановленное изображение удовлетворительного качества. При использовании двоичного преобразования при том же количестве обнулённых коэффициентов PSNR восстановленного изображения меньше 30 db, что говорит уже о плохом качестве изображения. Троичное преобразование Хаара даёт восстановленное изображение высокого качества (PSNR>40) при 62% нулевых коэффициентов по компоненте Y по достаточно детализированному изображению и при 72% – по слабо детализированному изображению и 98% нулевых коэффициентов по компонентам Cr и Cb. Откуда можно сделать вывод, что троичное преобразование позволяет достичь лучших результатов сжатия изображения.

Заключение В работе были рассмотрены основные аспекты теории унитарных матриц. В частности сформулированны и доказаны основные свойства унитарных матриц. Рассмотрены дискретные ряды Фурье, построено дискретное преобразование Фурье, сформулированны и доказаны его основные свойства. Была разработана программа на языке $C\sharp$, реализующая прямое и обратное дискретное преобразование Фурье. Была построена троичная система Хаара и исследованы свойства этой системы. Разработан алгоритм разложения ступенчатой функции с длиной ступеньки кратной степени 3 по троичной системе Хаара. Построен алгоритм быстрого преобразования по троичной системе Хаара. Полученный алгоритм был протестирован на различных изображениях. Проведён сравнительный анализ характеристик восстановленных изображений преобразованных по двоичной и по троичной системам Хаара. Средняя квадратическая ошибка при использовании троичного преобразования при делении изображения на блоки различного размера оказалась ниже, чем при использовании двоичного преобразования. Пиковое отношение уровня сигнала к шуму оказалось в среднем выше в троичном преобразовании. Полученные результаты показывают, что быстрое троичное преобразование Хаара позволяет восстанавливать изображение с большей степенью точности по меньшему количеству коэффицентов, чем двоичное преобразование Хаара. Результаты, полученные в работе, могут быть в дальнейшем использованы при разработке алгоритмов сжатия и восстановления изображений.