Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Интерполяция на треугольных сетках

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

студента 4 курса 421 группы
направления (специальности) 02.03.01 математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Хасянова Рамиса Шавкятовича

Научный руководитель
доцент, к.ф-м.н. ________________ Матвеева Ю.В.

Научный консультант
профессор, д.ф-м.н. ________________ Лукомский С.Ф.

Зав. кафедрой
профессор, д.ф-м.н. ________________ Прохоров Д.В.

Саратов 2018

Введение

Теория интерполирования кусочно-полиномиальными функциями не была систематизирована до конца 60-х годов 20-ого века. Вопросы сходимости локальных интерполяционных и кратных интерполяционных процессов, связанных с аппроксимацией функций на многогранных областях кусочно-полиномиальными функциями, связаны с разбиением области на симплексы. Данные вопросы тесно связаны с методом конечных элементов (МКЭ).

Метод конечных элементов основан на локальной аппроксимации решения кусочно-полиномиальными функциями. Исходная область разбивается на подобласти стандартного вида, в качестве которых выступают треугольники или четырехугольники. Делая подобласть достаточно малой, либо выбирая достаточно высокую степень полиномов, можно добиться того, чтобы аппроксимирующая функция достаточно точно передавала локальное поведение решения.

Оценки погрешности аппроксимации интерполируемой функции и ее производных характеризуются двумя параметрами - диаметром разбиения (триангуляции) и некоторой характеристикой симплекса. В двумерных случаях, например, в большинстве работ в качестве этой второй характеристики служит синус наименьшего угла разбиения.

Первая оценка аппроксимации производных кусочно-линейными функциями на треугольнике была представлена Шварцем. Здесь роль второй характеристики играет синус наибольшего угла триангуляции. Для полиномов первой степени Зламал [1] в двумерном случае указал оценки сверху и снизу, которые зависят от диаметра разбиения и синуса наибольшего угла триангуляции. Эти оценки являются равномерными по указанным параметрам. Общую же оценку сверху для произвольной триангуляции, произвольных интерполяционных процессов в $\mathbb{R}^n$ получили Сьярле и Равьяр [2]. В некоторых случаях наименьший угол, фигурирующий в оценках, можно заменить на средний (или наибольший, что с точностью до констант равносильно). Отметим, что до работы Сьярле и Равьяра (1972 год) изучался только двумерный случай, они же получили оценки погрешности для произвольной размерности. Для функций n переменных они установили оценки, в которых константы при аппроксимации n—ых производных зависят от диаметра симплекса и радиуса вписанного в него шара. Эта характеристика является двумерным аналогом синуса наименьшего угла триангуляции.

Заметим, что во всех перечисленных выше работах оценки аппроксимации были даны в терминах частных производных. Нашей задачей будет обобщение результата [3], связанного с интерполяцией кубическими сплайнами в терминах производных по направлениям. Зная результаты отклонения в терминах производных по направлениям, можно указать результат отклонения в терминах частных производных.

Мы выбираем интерполяционные условия в терминах производных по направлениям ребер симплекса. В этих же терминах получены оценки отклонения производных многочлена от соответствующих производных интерполируемой функции в предположении, что интерполируемая функция имеет непрерывные производные по направлениям до 4-го порядка включительно. Определено понятие длинного ребра и в терминах длинных ребер введены геометрические характеристики симплекса. Доказано, что для размерности 3 и 4 интерполяционные условия можно выбрать так, что оценки отклонения производных не зависят от геометрии симплекса, а в случае размерности больше 4 при выбранных интерполяционных условиях это невозможно. Поставлена геометрическая задача об избавлении от второго параметра в оценке частных производных.

Актуальность темы. Аппроксимация на симплексах используется в методе конечных элементов, однако, представляет и самостоятельный интерес. Метод конечных элементов активно применяется, например, в задачах прикладной механики.

Новизна. Мы выбираем интерполяционные условия в терминах производных по направлениям ребер симплекса, тем самым строим так называемый Эрмитов сплайн. В работе доказано, что для размерности 3 и 4 интерполяционные условия на симплексе можно выбрать так, что оценки отклонения производных не зависят от геометрии симплекса, а в случае размерности больше 4 при выбранных интерполяционных условиях это невозможно. На текущий момент известно очень мало результатов, связанных с аппрксимацией производных функции с производными интерполяционых многочленов Эрмита размерности 3 и выше и эта работа является шагом в изучении данной проблематики. Возможно, что в дальнейшем накопление результатов такого рода даст возможность строить кусочно-полиномиальные функции эрмитова типа на произвольных триангуляциях в приложении к методу конечных элементов, одновременно являющиеся непрерывными и приводящими к "хорошим"оценкам производных. Отметим, что интерполяция эрмитова типа даёт меньшее число определяющих глобальных параметров по сравнению с интерполяцией Лагранжа при реализации метода конечных элементов.

Цель. Изучить аппроксимацию на симплексах и в терминах производных по направлениям ребер симплекса получить оценки отклонения производных многочлена от соответствующих производных интерполируемой функции в предположении, что интерполируемая функция имеет непрерывные производные по направлениям до 4-го порядка включительно. Показать, как оценки зависят от размерности пространства. Поставить задачу об избавлении от второго параметра в этих оценках.

Структура и объём работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованных источников, включающего 25 наименований.

Основное содержание работы

Во введении приводится история изучения данной тематики, приводятся аргументы в пользу защиты актуальности рассматриваемой задачи, формулируется основная проблема. Нашей задачей будет обобщение результата [4], связанного с интерполяцией кубическими сплайнами в терминах производных по направлениям. Зная результаты отклонения в терминах производных по направлениям, можно указать результат отклонения в терминах частных производных.

В первой главе введены основные понятия, такие, как аппроксимация, интерполяция, приведены простейшие примеры использования аппроксимации и интерполяции на практике. Также введён в рассмотрение симплекс, изучены основные геометрические свойства симплекса. Введены понятия сплайна, виды сплайнов, их свойства и т.д., в частности, будет уделено большое внимае Эрмитову сплайну. Так же будет разобрана идея метода конечных элементов.

Аппроксимация функций заключается в приближенной замене заданной функции $f(x)$ некоторой функцией $F(x)$ так, чтобы отклонение функции $F(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция $F(x)$ при этом называется аппроксимирующей.

Типичной задачей аппроксимации функций является задача интерполяции. Необходимость интерполяции функций в основном связана с двумя причинами:

1. Функция $f(x)$ имеет сложное аналитическое описание, вызывающее определенные трудности при его использовании (например, $f(x)$ является спецфункцией: гамма-функцией, эллиптической функцией и др.).

2. Аналитическое описание функции $f(x)$ неизвестно, т.е. $f(x)$ задана таблично. При этом необходимо иметь аналитическое описание, приближенно представляющее $f(x)$ (например, для вычисления значений $f(x)$ в произвольных точках, определения интегралов и производных от $f(x)$ и т. п.)

Такие задачи часто возникают на практике. Например, в геологии проводится опробование месторождение и определяется концентрация полезных ископаемых в определенных точках, с помощью интерполяции можно оценить концентрацию в промежуточных точках. В демографии проводится перепись населения через каждые 10 лет, с помощью интерполяции можно определить численность населения в промежуточных точках.

Простейшая задача интерполяции заключается в следующем. На отрезке $[a, b]$ заданы n+1 точки $x_0, x_1, ..., x_n$, которые называются узлами интерполяции, и значения некоторой функции f(x) в этих точках $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$,

$..., f(x_n) = y_n$.

Требуется построить функцию $F(x)$ (интерполяционная функция), принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и f(x), т. е. такую, что $F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, ..., F(x_n) = y_n$.

Геометрически это означает, что нужно найти кривую $y = F(x)$ некоторого определенного типа, проходящую через заданную систему точек $M(x_i, y_i)$ (i = 0, 1, ..., n).

В данной работе будет рассматриваться задача интерполяции производной функции нескольких переменных.

Сплайн – функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке [a,b], а на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом.

Максимальная из степеней использованных полиномов называется степенью сплайна.

Разность между степенью сплайна и получившейся гладкостью называется дефектом сплайна.

Сплайны имеют многочисленные применения как в математической теории, так и в прикладной математике (в частности, в разнообразных вычислительных программах). В частности, сплайны двух переменных интенсивно используются для задания поверхностей в различных системах компьютерного моделирования. Сплайны двух аргументов называют би-сплайнами (например, бикубический сплайн), которые являются двумерными сплайнами, моделирующими поверхности.

Метод конечных элементов (МКЭ) — это численный метод решения дифференциальных уравнений с частными производными, а также интегральных уравнений, возникающих при решении задач прикладной физики. Метод широко используется для решения задач механики деформируемого твёрдого тела, теплообмена, гидродинамики и электродинамики.

Суть метода следует из его названия. Область, в которой ищется решение дифференциальных уравнений, разбивается на конечное количество подобластей (элементов). В каждом из элементов произвольно выбирается вид аппроксимирующей функции. В простейшем случае это полином первой степени. Вне своего элемента аппроксимирующая функция равна нулю. Значения функций на границах элементов (в узлах) являются решением задачи и заранее неизвестны. Коэффициенты аппроксимирующих функций обычно ищутся из условия равенства значения соседних функций на границах между элементами (в узлах). Затем эти коэффициенты выражаются через значения функций в узлах элементов. Составляется система линейных алгебраических уравнений. Количество уравнений равно количеству неизвестных значений в узлах, на которых ищется решение исходной системы, прямо пропорционально количеству элементов и ограничивается только возможностями ЭВМ. Так как каждый из элементов связан с ограниченным количеством соседних, система линейных алгебраических уравнений имеет разрежённый вид, что существенно упрощает её решение.

Наиболее известным способом разбиения области на подобласти в методе конечных элементов является триангуляция. Для того, чтобы ввести это понятие, нужно дать определение симлекса.

Симплекс (точнее, n-симплекс, где число n называется размерностью симплекса) — это, по определению, выпуклая оболочка n+1 точки аффинного пространства (размерности n или больше), которые предполагаются аффинно независимыми (то есть не лежат в подпространстве размерности n–1). Эти точки называются вершинами симплекса.

n-симплекс можно представлять в виде полного графа с n+1 вершиной (рис.1)

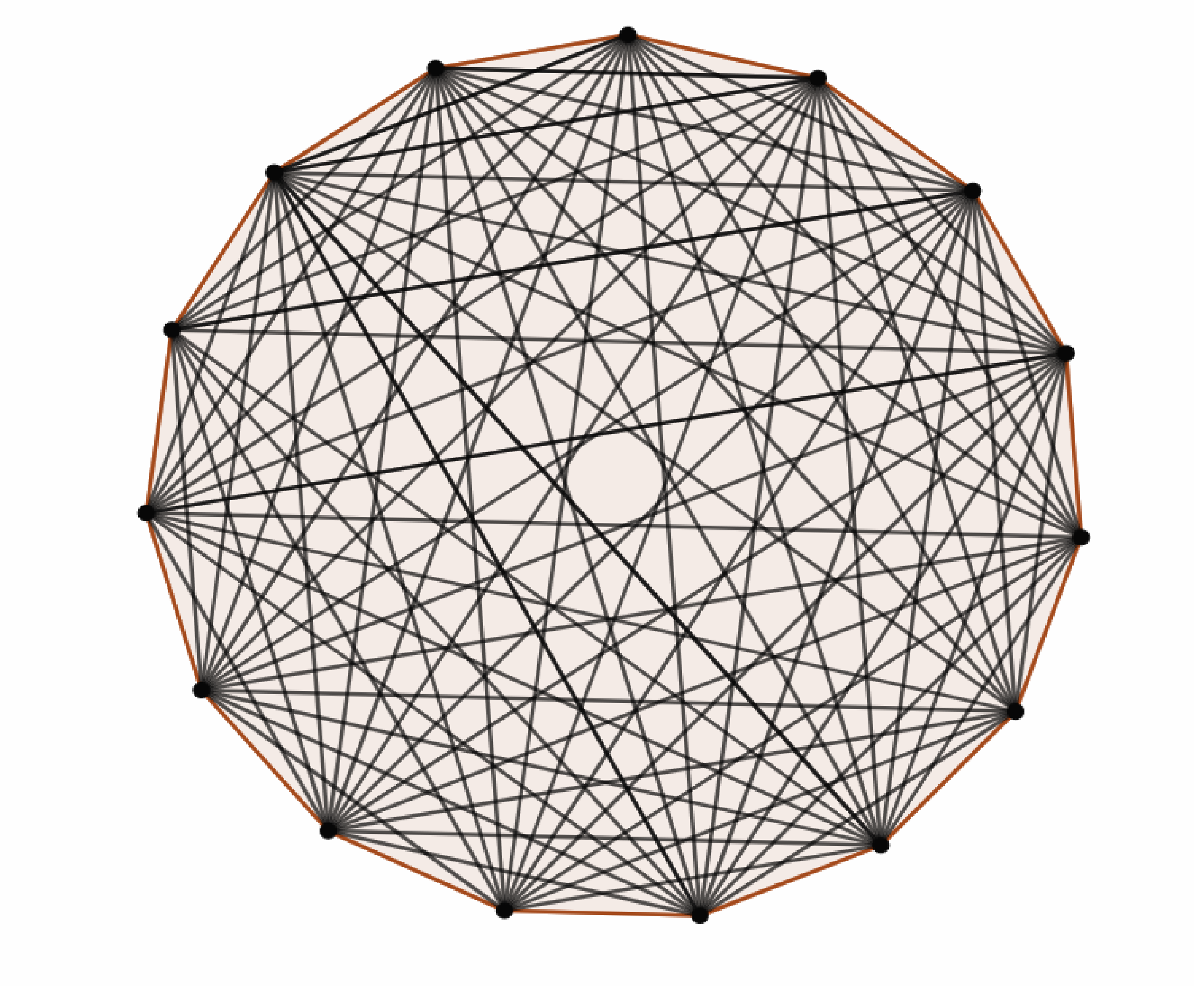

Рис. 1: 14-симплекс.

Во второй главе ставится и решается задача об эрмитовой интерполяции на симплексе.

Пусть D - подмножество евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ на котором можно построить геометрический комплекс $\{\overline{T_i}\}_{i \in I}$ (разбить D на симплексы $\overline{T_i}$). Будем рассматривать задачу выбора на симплексе $\overline{T_i}$ интерполяционных условий для построения многочлена Эрмита третьей степени, производные до третьего порядка включительно которого будут аппроксимировать соответствующие производные некоторой функции $f \in C^4(\overline{T_i})$. Задача многомерной аппроксимации на симплексе изучалась, например, в работах [4-7]. В данной работе мы предлагаем новый способ построения многочлена Эрмита на многомерном симплексе (эрмитов многочлен строился, например, в работах [8-10]). Есть смысл получать оценки отклонения в терминах производных по направлениям так, чтобы оценка становилась "лучше"при уменьшении диаметра симплекса (измельчении комплекса). В [3] требуемый результат был получен для тетраэдра. Наш результат распространяется и на трёхмерный случай. От он отличается только одним интерполяционным условием. Сформулируем этот результат.

Теорема. [4] *Пусть* $\overline{T} = A_0A_1A_2A_3$ *- тетраэдр,* $f \in C^4(\overline{T})$,

$$M_4 = \max_{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4}} \max_{0 \leq i_j \leq 4 : \sum i_j = 4} \max_{\mathbf{x} \in \overline{T}} \left| \frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_1^{i_1} \partial \mathbf{e}_2^{i_2} \partial \mathbf{e}_3^{i_3} \partial \mathbf{e}_4^{i_4}} \right|,$$

где $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}$ *- всевозможные направления в тетраэдре.*

В любом тетраэдре есть вершина, из которой выходят по крайней мере два ребра, больших $\frac{d}{2}$, *пусть это будет вершина* A_3. *Будем считать, что точка* $\mathbf{x}$ *задана своими барицентрическими координатами* (x_0, x_1, x_2, x_3) *относительно вершин треугольника.* d *- диаметр* $\overline{T}$, *и пусть многочлен*

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{3} a_i x_i^3 + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq 3 \\ i \neq j}} a_{ij} x_i^2 x_j + \sum_{0 \leq i < j < k \leq 3} a_{ijk} x_i x_j x_k$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$f(A_i) = Q(A_i), \quad i = \overline{0,3},$$

$$\frac{\partial f(A_i)}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial Q(A_i)}{\partial e_{ij}}, \quad i,j = \overline{0,3}, \quad i \neq j.$$

$$\frac{\partial (Q-f)(P_{31})}{\partial e_{30}} = 0, \quad \frac{\partial (Q-f)(P_{32})}{\partial e_{31}} = 0,$$

$$\frac{\partial (Q-f)(P_{20})}{\partial e_{32}} = 0, \quad \frac{\partial (Q-f)(P_{20})}{\partial e_{31}} = 0,$$

где P_{ij} *есть середина отрезка* $[A_iA_j], \mathbf{e}_{ij} = \dfrac{\overrightarrow{A_iA_j}}{|A_iA_j|}$.

Тогда $\exists C > 0 : \forall \mathbf{x} \in \overline{T}$,

$$\left|\frac{\partial^r (Q-f)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{30}^i \partial \mathbf{e}_{31}^k \partial \mathbf{e}_{32}^{r-i-k}}\right| \le CM_4 d^{4-r}, \quad 1 \le r \le 3, \quad 0 \le i, k \le r \quad (i+k \le r).$$

Мы будем получать оценки, не зависящие от геометрии симплекса в пространствах размерности 3 и 4 , а в пространствах большей размерности для получения "хорошей"оценки нужно будет выбрать подходящую триангуляцию, т.к. в этом случае в оценке присутствует дополнительный параметр, который связан с коэффициентом изопериметричности симплекса.

Пусть $\overline{T} = A_0 A_1 ... A_n$ есть n-симплекс ($n \ge 3$), d - диаметр этого симплекса (длина наибольшего ребра). Пусть $c_n > 1$. Назовём ребро длинным, если оно больше, чем $\dfrac{d}{c_n}$. Будем предполагать, что симплекс $\overline{T}$ выбран таким образом, что в нём можно найти вершину, из которой выходят по крайней мере $(n-1)$ длинное рёбро и пусть это вершина A_n. Длинные рёбра обозначим $[A_nA_m]$ и $[A_nA_l]$, а те, про которые неизвестно, являются ли они длинными или нет, назовём неизвестными и обозначим их $[A_nA_s]$ $(m < l < s)$.

Пусть

$$M_4 = \max_{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}} \max_{0 \le i_j \le 4 : \sum i_j = 4} \max_{\mathbf{x} \in \overline{T}} \left| \frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_1^{i_1} \partial \mathbf{e}_2^{i_2} \partial \mathbf{e}_3^{i_3} \partial \mathbf{e}_4^{i_4}} \right|,$$

где $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}.\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}$ - всевозможные направления в симплексе.

Будем считать, что точка $\mathbf{x}$ задана своими барицентрическими координатами $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пусть многочлен

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i^3 + \sum_{\substack{0 \le i,j \le n \\ i \ne j}} a_{ij} x_i^2 x_j + \sum_{0 \le i < j < k \le n} a_{ijk} x_i x_j x_k.$$

удовлетворяет следующим интерполяционным условиям:

$$f(A_i) = Q(A_i), \quad i = \overline{0,n},$$

$$\frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{\partial Q(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}}, \quad i,j = \overline{0,n}, \quad i \ne j,$$

$$\frac{\partial (Q-f)(P_{nk})}{\partial \mathbf{e}_{np}} = 0, \quad 0 \le p < k < n,$$

$$\frac{\partial (Q-f)(P_{ij})}{\partial \mathbf{e}_{np}} = 0, \quad 0 \le i < j < p < n,$$

где P_{ij} есть середина отрезка $[A_iA_j], \mathbf{e}_{ij} = \dfrac{\overrightarrow{A_iA_j}}{|A_iA_j|}$.

Теорема. *Пусть $f(\mathbf{x}) \in C^4(\overline{T})$, тогда для любой точки $\mathbf{x} \in \overline{T}$*

$$\left| \frac{\partial^r (Q-f)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}^i_{nm} \partial \mathbf{e}^j_{nl} \partial \mathbf{e}^{r-i-j}_{ns}} \right| \le 15 c_n M_4 d^{4-r}, \quad 1 \le r \le 3, \quad 0 \le i,j \le r, \quad i+j \le r. \quad (1)$$

Предложение. 1. *В любом тетраэдре можно найти вершину, из которой выходят по крайней мере два ребра, больших $\dfrac{d}{2}$, и в любом 4-симплексе есть вершина, из которой исходят по крайней мере три ребра, больших $\dfrac{d}{2}$.*

2. *Для любого натурального $n \ge 5$ и для всякого $c > 0$ существует такой n-симплекс, из всех вершин которого выходят по крайней мере два ребра, длина которых не больше, чем $\dfrac{d}{c}$.*

Следствие. *В случаях размерностей $n = 3$ и $n = 4$ в неравенствах (1) можно избавиться от параметра c_n и получить следующие оценки:*

$$\left| \frac{\partial^r (Q-f)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}^i_{nm} \partial \mathbf{e}^j_{nl} \partial \mathbf{e}^{r-i-k}_{ns}} \right| \le 30 M_4 d^{4-r}, \quad 1 \le r \le 3, \quad 0 \le i,j \le r, \quad i+j \le r.$$

Второй пункт предложения означает, что если $n \ge 5$, то в неравенствах (1) нельзя избавиться от параметра c_n. Отметим, что с похожей проблемой столкнулась Н.В. Байдакова в работе [12], где интерполяция проводилась в равномерных узлах симплекса.

В третьей главе будет рассказано о триангуляции Делоне, которая используется в аппроксимации производных на симплексе.

Список использованных источников

1. Zlamal, M. Mathematical aspectof the finite element method / Zlamal M., Zenisek A. // Technical, physical and mathematical principles of the finite element method (V. Kolar et al. eds.) Praha: Acad. VED. 1971. P. 15-39.

2. Ciarlet, P.G. General Lagrange and Hermite interpolation in Rn with applications to finite element methods / Ciarlet P.G., Raviart P.A. // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1972. V. 46. № 3. P. 177-199.

3. Куприянова Ю.В. Об одной теореме из теории сплайнов / Ю.В. Куприянова // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2008. том 48. с. 206-211 Куприянова Ю.В. Об одной теореме из теории сплайнов / Ю.В. Куприянова // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2008. том 48. с. 206-211

4. Куприянова Ю.В. Об одной теореме из теории сплайнов / Ю.В. Куприянова // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2008. том 48. с. 206-211

5. Ciarlet P.G., Paviart P. A. General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods, Arch. Rat. Mech. Anal, 1972, V. 46, N 3. P. 177—199.

6. Субботин Ю.Н. Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции, Тр. МИАН, 1989, С. 117—137.

7. Субботин Ю.Н. Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на n-симплексах, Матем. заметки, 48:4 (1990), 88–100

8. Ю. А. Килижеков.Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами первой степени на n-симплекса. Матем. заметки, 60:4 (1996), 504–510

9. Ю. В. Куприянова, С. Ф. Лукомский. Об оптимальном выборе интерполяционного сплайна по треугольной сетке, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 5:1-2 (2005), 26–33

10. Ю. В. Матвеева. Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 7:1 (2007), 23–27

11. А. В. Мелешкина. Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена Эрмита на треугольнике, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 50:2 (2010), 211–220; Comput. Math. Math. Phys., 50:2 (2010), 201–210

12. Байдакова Н.В. Об оценках П. Жамэ для конечных элементов с интерполяцией в равномерных узлах симплекса, Матем. тр., 20:1 (2017), 43–74