Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций
и стохастического анализа

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ОДНОРОДНЫХ ЗАМКНУТЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Жариновой Алены Денисовны

Научный руководитель
ст. преп. ______________________________ Н.В.Сергеева

Зав. кафедрой
д.ф-м.н, профессор ______________________________ С.П. Сидоров

Саратов, 2018

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Теория сетей массового обслуживания - раздел теории вероятности, который является эффективным инструментом для моделирования и анализа различного рода сетей: производственных, коммуникационных, транспортных, информационно-вычислительных и т.д.

В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с различными формами обслуживания и обслуживающими системами. Совокупность систем обслуживания образуют сеть массового обслуживания. Работа сети массового обслуживания состоит в удовлетворении поступающего в нее запросов. Эти запросы называются требованиями. В общем случае процессы поступления требований в сеть и системы и процессы их обслуживания являются случайными.

Данная работа представляет интерес, поскольку методы теории массового обслуживания ориентированы на анализ систем и сетей массового обслуживания: математическая формализация процессов функционирования систем и сетей, получение математических выражений для характеристик их математических моделей, объяснение причин специфических явлений при функционировании исследуемых систем и сетей.

Целью бакалаврской работы является моделирование и анализ однородных замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания.

Объект исследования — однородная замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания.

Предмет исследования — обслуживание требований, поступающих в сеть массового обслуживания.

Для достижения поставленной целей в работе необходимо решить следующие **задачи**:

— определить основные понятия, которые связаны с системами массового обслуживания;

— рассмотреть однородные замкнутые экспоненциальные сети массового обслуживания;

— описать структуру имитационного моделирования сетей массового обслуживания;

— построить математическую модель однородной замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания;

— рассчитать основные характеристики данной сети обслуживания на основе имитационной и теоретической моделях;

— провести сравнительный анализ полученных характеристик.

Практическая значимость проводимого исследования состоит в том, что на основании построенной компьютеризированной модели однородной замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания можно проводить исследования реальных обслуживающих сетей, рассчитывать экономические характеристики эффективности функционирования этих сетей. По результатам этих вычислений делать выводы о состоятельности и эффективности предприятий.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 20 наименований, и двух приложений. Общий объем работы составляет 49 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В **первом** разделе рассмотрены основные понятия систем массового обслуживания (СМО), которые производят обслуживание требований, поступающих в нее из источника требований и возвращающихся после обслуживания в источник. Работа системы массового обслуживания состоит в обслуживании потока требований или заявок, которые поступают одна за другой в случайные моменты времени. Обслуживание требования продолжается какое-то время, время окончания обслуживания требования – есть случайная величина, после чего обслуживающий прибор (канал) освобождается и снова готов для приема следующего требования. Каждая система массового обслуживания, в зависимости от числа приборов и их производительности, обладает какой-то пропускной способностью, позволяющей справляться с потоком требований. Таким образом, имеются две взаимодействующие стороны обслуживаемые и обслуживающие. Взаимодействия двух потоков: поток требований на обслуживание, поток высвобождающихся требований после обслуживания и составляют систему массового обслуживания.

У всех систем массового обслуживания можно выделить общие классификационные признаки:

1. *Входящий поток требований* – процесс поступления требований в систему. Случайная последовательность требований, которые поступают в систему обслуживания и которые необходимо обслужить, называется *потоком* требований. Поток требований определяется моментами поступлений τ_i и числом требований γ_i, поступающих в момент τ_i . При этом γ_i и τ_i в общем случае случайны.

Особенно важен частный случай, когда все длительности промежутков времени $\xi_i = \tau_{i+1} - \tau_i$ между последовательными требованиями имеют одинаковое экспоненциальное распределение с параметром λ. Такой поток называется *пуассоновским* (или простейшим потоком) с интенсивностью λ, так как случайное число требований, поступающих в промежутке времени длительности t, подчинено пуассоновскому распределению с параметром λt.

Пуассоновские потоки на практике встречаются очень часто, так как к их образованию приводит суммирование случайных потоков с большими интервалами времени между поступлением требований. Пуассоновский поток выделяется особо не только из-за его простоты, но и потому, что при суммировании пуассоновских потоков результирующий поток также будет пуассоновским.

2. *Структура системы* – количество и типы обслуживающих приборов, а также наличие и емкости накопителей перед всеми приборами в целом и/или отдельными из них. В случае, когда система имеет один или несколько одинаковых приборов и каждое требование может обслуживаться на любом из них, то система такого типа называется *однолинейной* или *многолинейной* соответственно.

В системах обслуживания могут быть учтены *накопители разной емкости*, или же *места для ожидания*, которые дают возможность требованиям, ожидать начала обслуживания. Если емкость накопителя бесконечна, то это *система бесконечной емкости*, или *система с ожиданием*, а если конечна, то *система конечной емкости*, или *система с конечным числом мест ожидания*, в случае, когда накопители вообще отсутствуют, то *система с потерями.*

3. *Время обслуживания требований на приборах* – время, которое требо-

вания должны реально находиться на приборах, чтобы иметь возможность завершить обслуживание и покинуть систему.

4. *Дисциплина обслуживания* – процесс распределения требований между приборами,формирование очередей, выбора требований из очереди на обслуживание.

5. *Показатель производительности* – пользовательские характеристики обслуживания, которые показывают, в какой мере система справляется с возложенной на нее задачей.

Во **втором** разделе содержится подробное описание однородных замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания, заданные набором Γ,

$$\Gamma = \langle L, 1, M, M, \Theta, \kappa, \mu, FCFS \rangle$$

которые содержат L систем массового обслуживания C_i, $i = \overline{1, L}$, обслуживающих M требований одного класса, циркулирующих в сети. Система C_i, $i = \overline{1, L}$, содержит κ_i параллельно работающих одинаковых приборов, длительность обслуживания требований прибором имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i. Выбор в C_i очередного требования на обсуждение производится из общей очереди неограниченной длины согласно дисциплине $FCFS$. Через $\Theta = \theta_{ij}$, $i, j = \overline{1, L}$, обозначена маршрутная матрица данной сети; элемент θ_{ij} равен вероятности перехода требования из системы обслуживания с номером C_i в систему обслуживания с номером C_j после завершения обслуживания данного требования в C_i.

Рассматриваются основные формулы, определяющие вероятность пребывания сети в состоянии $m = (m_i)$

$$P(m) = \frac{1}{G(N, L)} \prod_{i=1}^{L} f_i(m_i),$$

где $f_i(m_i)$ – величина, пропорциональная вероятности того, что система C_i находится в состоянии m_i (в C_i пребывает m_i требований),

$$f_i(n_i) = \frac{x_i^{m_i}}{\prod\limits_{t=1}^{m_i} \alpha_i(t)}, \quad x_i = \frac{\omega_i}{\mu_i},$$

$\omega = (\omega_i)$, $i = \overline{1, L}$ – решение уравнения $\omega\mathit{\Theta} = \omega$, с условием нормировки

$\sum\limits_{i=1}^{L} \omega_i = 1;$
$\alpha_i(t) = min(t, \kappa_i), 1 \leq t \leq M;$
$G(M, L)$ – нормализующая константа, которая определяется из условия нормировки, как

$$G(M, L) = \sum_{m \in S(M,L)} \prod_{i=1}^{L} f_i(m_i),$$

$S(M, L)$ - множество состояний сети

$$S(M, L) = \left\{ m = (m_1, ..., m_L) | m_i \geq 0, i = 1, ..., L, \sum_{i=1}^{L} m_i = M \right\},$$

m_i - число требований, находящихся в системе C_i.

Мощность $S(M, L)$ равна

$$C = \frac{(M + L - 1)!}{M!(L - 1)!}.$$

На основании параметров набора Γ вычисляются сетевые и системные характеристики сети, которые описывают функционирование соответствующих систем и сети в целом.

Системные характеристики, описывающие эффективность функционирования отдельных систем сети:
$\bar{w}_j$ – среднее время ожидания требования в системе C_j,
$\bar{u}_j = \bar{w}_j + \mu_j$ – среднее время пребывания требований в системе C_j,
$\bar{m}_j = \lambda_j \bar{u}_j = \alpha_j \lambda_0 (\bar{w}_j + \mu_j)$ – среднее число требований в системе C_j (в очереди и на обслуживании).

Сетевые характеристики, описывающие функционирование сети в целом:
$M = \sum\limits_{j=1}^{L} \bar{m}_j$ – среднее число требований, находящихся в сети,
$W = \sum\limits_{j=1}^{L} \alpha_j \bar{w}_j$ – среднее время ожидания требований в сети,
$W_j = \alpha_j \bar{w}_j$ – суммарное (полное) время ожидание требования в системе C_j за время её нахождения в сети,
$U = \sum\limits_{j=1}^{L} \alpha_j \bar{u}_j$ – среднее время пребывания требования в сети,

$U_j = \alpha_j \bar{u}_j$ – суммарное (полное) время пребывания требования в системе C_j за время её нахождения в сети,
$\lambda_0 = \dfrac{\lambda_j}{\alpha_j}$ – производительность замкнутой сети, определяемая как интенсивность потока требований.

Важное значение в исследование сетей массового обслуживания имеют формулы Литтла: $H = \lambda_0 W$ или $M = \lambda_0 U$.

Третий раздел посвящен принципам построения имитационных моделей сетей массового обслуживания. Имитационное моделирование есть процесс конструирования модели реальной системы и постановки экспериментов на этой модели с целью либо понять поведение системы, либо оценить различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы.

В сети циркулирует M требований. В начальный момент времени все требования должны быть распределены некоторым образом между системами обслуживания. В момент поступления требования в систему обслуживания необходимо проверить состояние обслуживающего прибора: занят он или свободен. В случае, если обслуживающий прибор в системе свободен, то требование поступает на обслуживание и генерируется время обслуживания по экспоненциальному закону распределения для данного требования. Если прибор оказывается занят, то требование поступает в очередь и ждет момента обслуживания. Как только требование обслуживается в какой-либо системе, оно мгновенно переходит в другую систему. Считается, что момент выхода требования из системы является моментом входа требования в следующую систему.

Основными событиями, меняющими состояние сети, являются моменты перехода требований из одной системы обслуживания в другую. Поэтому требованию должны соответствовать атрибуты, такие как момент поступления требования t_n в очередь системы, момент начала обслуживания требования t_{nac}, момент завершения обслуживания требования t_{zav}. Разность моментов t_{zav} и t_{nac} определяет длительность пребывания требования в системе обслуживания, а разность моментов t_{nac} и t_n - длительность ожидания требования в очереди системы обслуживания. Поскольку число требований в замкнутой сети постоянно, то модельное время будем определять некоторым событием. Например, работа имитационной модели будет закончена, как только система C_1 обслужит заданное количество требований.

Будем определять следующие характеристики функционирования замкнутой сети: $\tilde{u}_i$ - среднее время пребывания требования в системе C_i; $\tilde{m}_i$ - среднее число требований в системе C_i, $i = \overline{1, L}$; $\tilde{U}$ - время пребывания требования в сети; $\tilde{\lambda}_0$ - производительность замкнутой сети.

Характеристики функционирования замкнутой сети можно вычислить по следующим формулам:
среднее число требований в очереди системы:

$$\tilde{m}_i = \frac{\text{суммарное время ожидания требования в очереди системы } C_i}{\text{время моделирования}},$$

среднее время пребывания требования в системе:

$$\tilde{u}_i = \frac{\text{суммарное время пребывания требований в системе } C_i}{\text{количество требований}},$$

производительность замкнутой сети:

$$\tilde{\lambda}_0 = \frac{\text{количество требований, прошедших через систему } C_1}{\text{время моделирования}},$$

среднее время пребывания требования в сети:

$$\tilde{U} = \frac{\text{суммарное время ожидания и обслуживания требований во всех системах}}{\text{количество требований, прошедших через систему } C_1}.$$

В **четвертом** разделе построена математическая модель однородной замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания, которая задана графом, приведенным на рисунке 1,

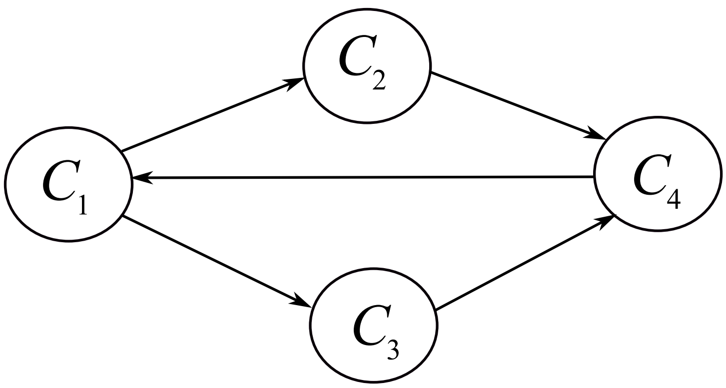

Рисунок 1 – Граф замкнутой сети обслуживания и матрицей вероятностей переходов

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сеть содержит 4 системы обслуживания C_i. Каждая система имеет один обслуживающий прибор, который может обслуживать только одно требование. После завершения обслуживания очередного требования мгновенно выбирается следующее. В сети циркулирует M требований, длительности обслуживания требований во всех системах C_i являются случайными величинами, которые имеют экспоненциальное распределение с параметром μ_i.

После завершения обслуживания требования в системе C_1 оно может поступить с вероятностью 0.3 в систему C_2, а с вероятностью 0.7 – в систему C_3. Чтобы выбрать направление перехода требования, необходимо сгенерировать равномерно распределенное случайное число из отрезка $[0, 1]$. Если число оказывает меньшим или равным 0.3, то требование направляется на обслуживание в систему C_2, иначе в систему C_3.

Для расчета системных и сетевых характеристик была написана программа в системе MatLab, моделирующая работу данной сети.

Входными данными программы являются: M, μ_i, Θ.

Расчет характеристик функционирования сети выполняется на основе накопления данных работы имитационной модели. Расчеты были выполнены для различного числа требований циркулирующих в сети.

Для оценки достоверности полученных результатов была написана дополнительная процедура, которая позволяет вычислять аналогичные характеристики, с помощью теоретических формул, приведенных в разделе 2.1.1.

Выходными данными программы являются следующие: $\bar{u}_i/\tilde{u}_i$ - среднее время пребывания требования в системе (аналитическая модель/ имитационная модель); $\bar{m}_i/\tilde{m}_i$ - среднее число требований в системе; $U/\tilde{U}$ - время пребывания требования в сети; $\lambda_0/\tilde{\lambda}_0$ - производительность сети.

Данные расчетов сетевых и системных характеристик в полном объеме приведены в работе. Таблица 1 содержит характеристики сети, полученные на основе имитационной модели и с помощью теоретических формул для различного числа требований, циркулирующих в сети. Время моделирования определяется числом требований ($N = 100000$), обслуженных в первой системе.

Таблица 1 – Характеристики замкнутой сети обслуживания ($N = 100000$)

		Расчет на основании теоретических результатов				Расчет на основании имитационной модели (N=100000)			
M	i	$\bar{u}_i(M)$	$U(M)$	$\lambda_0(M)$	$\bar{m}_i(M)$	$\tilde{u}_i(M)$	$\tilde{U}(M)$	$\tilde{\lambda}_0(M)$	$\tilde{m}_i(M)$
1	1	0.2500	0.8733	1.1450	0.2863	0.2503	0.8738	1.1444	0.2865
	2	0.5000			0.1718	0.5025			0.1723
	3	0.2000			0.1603	0.2006			0.1608
	4	0.3333			0.3817	0.3324			0.3804
2	1	0.3216	1.1203	1.7852	0.5741	0.3230	1.1507	1.7380	0.5613
	2	0.5859			0.3138	0.5765			0.3001
	3	0.2321			0.2900	0.2312			0.2815
	4	0.4606			0.8222	0.4931			0.8570
3	1	0.3935	1.3786	2.1762	0.8563	0.3942	1.4213	2.1107	0.8321
	2	0.6569			0.4288	0.6435			0.4080
	3	0.2580			0.3930	0.2571			0.3797
	4	0.6074			1.3218	0.6539			1.3802
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
18	1	0.9607	6.0155	2.9923	2.8747	0.9532	6.0257	2.9872	2.8474
	2	0.9056			0.8129	0.9003			0.8076
	3	0.3437			0.7199	0.3433			0.7176
	4	4.5425			13.5925	4.5619			13.6273
19	1	0.9687	6.3456	2.9942	2.9004	0.9691	6.3481	2.9930	2.9005
	2	0.9065			0.8141	0.9003			0.8091
	3	0.3440			0.7210	0.3438			0.7201
	4	4.8642			14.5644	4.8681			14.5702
20	1	0.9751	6.6763	2.9957	2.9211	0.9700	6.6902	2.9894	2.8996
	2	0.9071			0.8152	0.9055			0.8128
	3	0.3442			0.7218	0.3439			0.7194
	4	5.1881			15.5419	5.2078			15.5682

В **пятом** разделе проведен сравнительный анализ характеристик, полученных на основе имитационной модели, с аналогичными теоретическими характеристиками.

Анализируя результаты, приведенные в таблице 1, можно сказать о том, что характеристики функционирования замкнутой сети, которые получены на основе имитационной модели при большом времени моделирования, отличаются от характеристик, полученных на основании теоретических формул в среднем на $3 - 5\%$. Следует отметить, что при небольшом времени моделирования (в системе C_1 обслужено $N = 10$ требований) соответствующие характеристики сети отличаются друг от друга в среднем на $40 - 45\%$. Таким образом, увеличивая время моделирования можно добиться хорошего совпадения соответствующих системных и сетевых характеристик.

Таким образом, можно считать, что построенная модель имитирует работу однородной замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания, что позволяет проводить исследования реальных обслуживающих сетей, рассчитывать экономические характеристики эффективности функционирования этих сетей. По результатам этих вычислений делать выводы о состоятельности и эффективности предприятий.

При анализе полученных характеристик можно сделать вывод о том, что увеличение числа требований в сети, с одной стороны, приводит к увеличению производительности, что является положительным фактором, а, с другой стороны, – к увеличению времени пребывания требований в сети, что является нежелательным фактором.

Изученный алгоритм анализа однородных замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания позволяет строить имитационные модели сетей произвольной конфигурации, и вычислять на их основе основные характеристики функционирования.

В **заключении** приведены результаты бакалаврской работы.

Основные результаты

1. Определены основные понятия, связанные с системами массового обслуживания. Изучены системы обслуживания с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальной длительностью их обслуживания.

2. Изучены однородные замкнутые экспоненциальные сети массового обслуживания.

3. Изучен алгоритм анализа однородных замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания.

4. Изучены принципы построения имитационной модели сети массового обслуживания.

5. Построена математическая модель изученной сети массового обслуживания. Разработана программа, моделирующая работу такой сети, и позволяющая вычислять основные характеристики замкнутой сети.

6. Вычислены характеристики однородной замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания на основании имитационной модели и на основе теоретических формул для одинаковых входных параметров. Произведен сравнительный анализ этих характеристик.