Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций
и стохастического анализа

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРАСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Канахина Ивана Александровича

Научный руководитель
доцент ______________________ В.Р.Шебалдин

Зав. кафедрой
д.ф-м.н, профессор ______________________ С.П. Сидоров

Саратов, 2018

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Транспортная задача — одна из распространенных задач линейного программирования, получила в настоящее время широкое распространение в теоретических обработках и практическом применении на транспорте и в промышленности. Ее цель — разработка наиболее рациональных путей и способов транспортирования товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных, повторных перевозок. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий, фирм, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т. д.

Кроме того, к задачам транспортного типа сводятся многие другие задачи линейного программирования - задачи о назначениях, сетевые, календарного планирования. Формальным признаком транспортной задачи является то, что каждая переменная входит лишь в два ограничения, причем с коэффициентами, равными единице. Если при этом критерий оптимальности (сумма расходов, общий пробег) прямо пропорционален значениям переменных (транспортных потоков), возникает линейная транспортная задача. В других случаях рассматривается нелинейная транспортная задача, решаемая другими методами.

Данная работа представляет интерес, поскольку применение математических методов и вычислительных в планировании перевозок дает большой экономический эффект. Расчет эффективности работы производится по фактическим затратам транспортного подразделения.

Цель бакалаврской работы - освоить математическую постановку транспортной задачи линейного программирования, методы нахождения первоночального опорного и оптимального плана.

Объекты исследования — транспортная задача с соответствующими параметрами.

Предмет исследования — методы решения транспортной задачи и ее приложения.

Для достижения поставленных целей в работе необходимо решить следующие **задачи**:

— определить основные понятия, которые связаны с транспортными задачами линейного программирования;

— рассмотреть применение транспортной задачи для решения экономических задач;

— описать методы нахождения опорного плана транспортной задачи;

— рассмотреть методы нахождения оптимального плана, составить алгоритм;

— построить решение транспорной задачи, применяя методы нахождения опорного и оптимального плана.

Практическая значимость проводимого исследования состоит в том, что используя методы, рассмотренные в работе, можно расчитать минимальные затраты предприятия. Расчет эффективности работы производится по фактическим затратам транспортного подразделения. По результатам этих вычислений делаются выводы об оптимальности решения задачи.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 20 наименований, и приложений. Общий объем работы составляет 44 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В **первом** разделе рассмотрена постановка транспортной задачи о перевозках некоторого однородного груза из пунктов отправления (от поставщиков) в пункты назначения (к потребителям). Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок.

Для перевозок однородного груза имеется m пунктов отправления (поставщиков) $A_1, A_2, ..., A_m$ и n пунктов назначения (потребителей) $B_1, B_2, ..., B_n$. Количество груза, находящегося у потребителя A_i, будем обозначать через $a_i \quad (i = \overline{1, m})$. Количество груза, необходимое потребителю B_j — через $b_j \quad (j = \overline{1, n})$.

В качестве критерия оптимальности которой взята минимальная стоимость перевозок всего груза. Через c_{ij} обозначаются тарифы перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, через x_{ij} — количество груза, которое надо доставить из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Матрица тарифов(издержек или транспортных расходов)

$$
\text{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{m1} & c_{m2} & ... & c_{mn} \end{pmatrix}.
$$

Тогда математическая поставка транспортной задачи состоит в определении минимального значения функции

$$
F(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}; \quad x_{ij} = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, ...) \tag{1}
$$

при условиях

$$
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}); \tag{2}
$$

$$
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}); \tag{3}
$$

$$
x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \tag{4}
$$

Поскольку переменные $x_{ij}(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ удовлетворяют системам линейных уравнений (2) и (3) и условию неотрицательности (4), обеспечиваются доставка необходимого количества груза в каждый из пунктов назначения, вывоз имеющегося груза из всех пунктов отправления, а также исключаются обратные перевозки.

Определение. Всякое неотрицательное решение системы линейных уравнений (2) и (3), определяемое матрицей $X = (x_{ij}) \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$, называетя планом транспортной задачи.

План транспортной задачи

$$
\text{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{m1} & x_{m2} & ... & x_{mn} \end{pmatrix}.
$$

Определение. План $X^* = (x_{ij}^*) \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$, при котором функция (1) имеет свое минимальное значение, называетя оптимальный планом транспортной задачи.

Очевидно, общее наличие груза у поставщиков равно

$$\sum_{i=1}^{m} a_i,$$

а общая потребность в грузе в пунктах назначения равна единице. Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна заносу груза в пунктах отправления, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{5}$$

то модель такой транспортной задачи называется закрытой.

Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется открытой.

Замечание. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, то есть чтобы выполнялось равенство (5).

В случае превышения запаса над потребностью, то есть при

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6}$$

вводят фиктивный $(n+1)$-й пункт назначения с потребностью

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{7}$$

и соответствующие тарифы считают равными нулю:

$$c_{in+1} = 0 \quad (i = \overline{1, m}). \tag{8}$$

Полученная задача является транспортной задачей, для которой выполняется равенство (5).

Аналогично, при

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

вводят фиктивный $(m+1)$-й пункт отправления с запасом груза

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

и соответствующие тарифы полагают равными нулю:

$$c_{m+1j} = 0 \quad (j = \overline{1, n}). \tag{9}$$

Этим задача сводится к транспортной задаче с закрытой моделью, из оптимального плана, которой получается оптимальный план исходной задачи.

Во **втором** разделе рассмотрены как класические алгоритмы и методы решения транспортой задачи, которые могут быть использованы при решении некоторых экономических задач, не имеющий ничего обшего с транспортировкой груза. В этом случае величины тарифов c_{ij} имеют различный смысл в зависимости от конкретной экономической задачи. К таким задачам относятся следующее:

- оптимальное закрепление за станками операций по обработке деталей. В них c_{ij} является таким экономическим показателем, как производительность. Задача позволяет определить сколько времени и на какой операции нужно исполнять каждый из станков, чтобы обработать максимальное количество деталей. Так как транспортная задача требует нахождение минимума, то значения c_{ij} берутся с отрицательным знаком;

-увелечение производительности автомобильного транспорта за счет минимального порожнего пробега. Уменьшение дорожного пробега сократит количество автомобилей для перевозок, увеличив их производительность;

- решение задач с помощью метода запрещщения перевозок. Используется в том случае, если груз от некоторого поставщика по каким-то причинам не может быть отправлен одному из потребителей. Данное ограничение можно убрать, присвоив соответствующей клетке достаточно большое значение стоимости, тем самым в эту клетку не будут производится перевозки.

Третий раздел посвящен описанию нахождения опорного плана различными методами. Определение оптимального плана транспортной задачи начинают с поиска какого—нибудь ее опорного плана. Сущность метода состоит в том, что опорный план находят последовательно за $n+m-1$ шагов,на каждом из которых в таблице условий задачи заполняют одпу клетку, называемую занятой. Заполнение одной из клеток обеспечивает любо полностью удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения (того, в столбце которого находится заполненная клетка), либо вывоз груза из какого-либо пункта отправления (из того, в строке которого находится заполняемая клетке).

После того как проделаны $m + n - 2$ описанных выше шагов, получают задачу с одним пунктом отправления и одним пунктом назначения. При этом остается свободной только одна клетка, а запасы оставшегося пункта отправления будут равны потребностям оставшегося пункта назначения. Заполнив эту клетку, тем самым делают $(m+n-1)$-й шаг и получают искомый опорный план.

В **четвертом** разделе описан метод потенциалов. Общий принцип определения оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов аналогичен принцепу решения задачи линейного программирования симплексным методом, а именно: сначала находят опорный план транспортной задачи, а затем его последовательно улучшают до получения оптимального плана.

Определение. Числа α_i и β_j $(\overline{i = 1, m}; \overline{j = 1, n})$ называются потенциалами соответственно пунктов назначения и пунктов потребления.

Пусть имеется транспортная задача с балансовыми условиями

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}); \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n} \end{gathered} \tag{1}$$

причем

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{2}$$

Стоимость перевозки единицы груза из A_i в B_j равна c_{ij}, таблица стоимостей задана.

Найдем план перевозок (x_{ij}), который удовлетворял бы балансовым условиям (1), и при этом стоимость всех перевозок была минимальна:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min. \tag{3}$$

Идея метода потенциалов для решения транспортной задачи сводится к следующему. Каждый из пунктов отправления A_i вносит за перевозку единицы груза какую-то сумму α_i; в свою очередь, каждый из пунктов назначения также вносит за перевозку единицы груза сумму β_i; эти платежи передаются некоторому третьему лицу («перевозчику»).

Обозначим

$$\alpha_i + \beta_j = \overline{c_{ij}} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}); \tag{4}$$

и будем называть величину $\overline{c_{ij}}$ «**псевдостоимостью**» перевозки единицы груза из A_i в B_j

Платежи α_i, β_j не обязательно должны быть положительными: не исключено, что «перевозчик» сам платит тому или другому пункту какую-то премию за перевозку.

Обозначим для краткости всю совокупность платежей $\alpha_1, ..., \alpha_m$, $\beta_j, ..., \beta_n$ через (α_i, β_j)

Установим связь между платежами (α_i, β_j) и псевдостоимостью $\overline{c_{ij}} = (\alpha_i + \beta_j)$ с истинными стоимостями перевозок c_{ij}.

Предположим, что план (x_{ij}) невырожденный (число базисных клеток в таблице перевозок равно $m+n-1$). Для всех этих клеток $x_{ij} > 0$. Определим платежи (α_i, β_j) так, чтобы во всех базисных клетках псевдостоимости были равны стоимостям:

$$\overline{c_{ij}} = (\alpha_i + \beta_j) = c_{ij}, \text{ при } x_{ij} > 0,$$

что касается свободных клеток, где $x_{ij} = 0$, то в них соотношение между псевдостоимостями и стоимостями может быть какое угодно:

$$\overline{c_{ij}} = c_{ij}; \quad \overline{c_{ij}} < c_{ij} \text{ или } \overline{c_{ij}} > c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0.$$

Соотношение между псевдостоимостями и стоимостями в свободных клетках показывает, является ли план оптимальным, или же он может быть улучшен.

Признаком оптимальности плана (x_{ij}) является выполнение двух условий:

$$\overline{c_{ij}} = c_{ij}; \tag{5}$$

$$\overline{c_{ij}} \leq c_{ij}. \tag{6}$$

План, обладающий таким свойством, называется потенциальным, а соответствующие ему платежи (α_i, β_j) — потенциалами пунктов A_i, B_j $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$.

Пользуясь этой терминологией, мы можем сформулировать следующее: Всякий потенциальный план является оптимальным.

Теорема о методе потенциалов.Если для всех базисных клеток плана $(x_{ij} > 0)$

$$\alpha_i + \beta_j = \overline{c_{ij}} = c_{ij},$$

а для всех свободных клеток $(x_{ij} = 0)$

$$\alpha_i + \beta_j = \overline{c_{ij}} \leq c_{ij},$$

то план является оптимальным и никакими способами улучшен быть не может.

В **пятом** разделе проведен сравнительный анализ оптимальности решения задачи каждым из методов.

Построение опорного плана методом северо-западного угла.

Таблица 1 - Метод северо-западного угла.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5 40	4 20	1 -	2 -	60
A_2	4 -	2 5	6 20	3 15	40
A_3	7 -	3 -	5 -	4 35	35
b_j	40	25	20	50	

$$X = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 20 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозок будет равна:

$F(x) = 5*40 + 4*20 + 2*5 + 6*20 + 3*15 + 4*35 = 595$(у.д.е).

Построение опорного плана методом минимального элемента.

Таблица 2 - Метод минимального элемента.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5 -	4 -	1 20	2 40	60
A_2	4 5	2 25	6 -	3 10	40
A_3	7 35	3 -	5 -	4 -	35
b_j	40	25	20	50	

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 5 & 25 & 0 & 10 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозок такова:

$F(x) = 1*20 + 2*40 + 4*5 + 2*25 + 3*10 + 7*35 = 445$(у.д.е).

Построение опорного плана методом Фогеля.

Таблица 3 - Метод Фогеля.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	Разность по строкам				
A_1	5 -	4 -	1 20	2 40	60	1	2	-	-	-
A_2	4 5	2 25	6 -	3 10	40	1	1	1	1	-
A_3	7 35	3 -	5 -	4 -	35	1	1	1	1	1
b_j	40	25	20	50						
Разность по столбцам	1	1	4	1						
	1	1	-	1						
	1	1	-	1						
	1	-	-	1						
	1	-	-	-						

В результате получим опорный план

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 5 & 25 & 0 & 10 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозок:

$F(x) = 1*20+2*40+4*5+2*25+3*10+7*35 = 445$(у.д.е).

Метод потенциалов

Таблица 4 - Метод потенциалов.

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	5 $\boxed{2}$	4 $\boxed{3}$	1 20	2 40	0
A_2	4 40	2 $\boxed{0}$	6 $\boxed{4}$	3 0	1
A_3	7 $\boxed{2}$	3 25	5 $\boxed{2}$	4 10	2
β_j	3	1	1	2	

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозок составит:

$F_3(x) = 1 * 20 + 2 * 40 + 4 * 40 + 3 * 0 + 3 * 25 + 4 * 10 = 375$(у.д.е).

При анализе полученных данных о методах нахождения опорного плана и методах получения оптимального опорного плана, можно сделать вывод, что у каждого из методов есть свои достоинства и недостатки. Для нахождения первоначального опорного плана желательно использовать метод Фогеля, который находит близкое к оптимальному решение транспортной задачи, самый быстрый и простой способ получения опорного плана - метод северо-западного угла, а использование метода потенциалов дает возможность найти оптимальный план.

В **заключении** приведены результаты бакалаврской работы.

Основные результаты

1. Определены основные понятия, которые связаны с транспортными задачами линейного программирования;

2. Рассмотрены применение транспортной задачи для решения экономических задач;

3. Описаны методы нахождения опорного плана транспортной задачи;

4. Рассмотрены методы нахождения оптимального плана, составлен алгоритм нахождения оптимального плана;

5. Построено решение транспорной задачи, применяя методы нахождения опорного и оптимального плана;

6. Написана программа, позволяющая найти оптимальный план транспортной задачи.