Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций
и стохастического анализа

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ОДНОРОДНЫХ ОТКРЫТЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Молодецкой Анны Дмитриевны

Научный руководитель
ст. преп. ________________ Н. В. Сергеева

Зав. кафедрой
д.ф-м.н, профессор ________________ С. П. Сидоров

Саратов, 2018

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В повседневной жизни мы постоянно встречаемся с различными формами обслуживания и обслуживающими сетями. Примерами таких сетей могут служить телефонные станции, ремонтные мастерские, магазины, парикмахерские, аэропорты и т.д. Каждая такая сеть состоит из какого-то числа обслуживающих систем, в качестве которых могут фигурировать различные приборы, аппараты, линии связи, люди и т. п. Работа любой сети массового обслуживания состоит в удовлетворении поступающего в нее потока заявок. Заявки поступают в сеть одна за одной в случайные моменты времени, время обслуживания каждой заявки так же случайно.

Данная работа представляет интерес поскольку имитационное моделирование является мощным инструментом исследования поведения реальных сетей. Построенная имитационная модель сети массового обслуживания в дальнейшем может применяться для расчета экономических характеристик эффективности функционирования реальных сетей обслуживания. Методы имитационного моделирования позволяют собрать необходимую информацию о поведении сети путем создания ее компьютеризованной модели. Эта информация используется затем для проектирования реальной сети обслуживания.

Целью бакалаврской работы является моделирование и анализ однородной открытой сети массового обслуживания с ожиданием, с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальной длительностью их обслуживания.

Объект исследования —однородная открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания с ожиданием.

Предмет исследования — обслуживание заявок, поступающих в однородную открытую сеть массового обслуживания.

Для достижения поставленных целей в работе необходимо решить следующие **задачи**:

— определить основные понятия, связанные с системами массового обслуживания;

— рассмотреть частные случаи систем массового обслуживания — системы обслуживания с пуассоновским входящим потоком заявок, экспоненциальной длительностью их обслуживания, содержащие один обслуживающий прибор и k одиноковых обслуживающих приборов;

— определить основные понятия, связанные с сетями массового обслуживания;

— описать структуру имитационного моделирования сетей массового обслуживания;

— рассмотреть основные алгоритмы функционирования имитационных моделей сетей массового обслуживания;

— построить модель однородной открытой сети массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальной длительностью их обслуживания;

— рассчитать основные характеристики построенной сети с использованием теоретических формул и на основе имитационной модели;

— провести сравнительный анализ полученных характеристик.

Практическая значимость проводимого исследования состоит в том, на основании построенной компьютеризированной модели сети массового обслуживания можно проводить исследования реальных сетей, рассчитывать экономические характеристики эффективности функционирования этих сетей. По результатам этих вычислений делать выводы о состоятельности и эффективности предприятий.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 20 наименований, и трех приложений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В **первом** разделе рассмотрены основные понятия теории систем массового обслуживания. Вводится определение системы массового обслуживания, классификация систем массового обслуживания. Рассмотрены простейшие системы массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальной длительностью их обслуживания, которые содержат один обслуживающий прибор и k одиноковых обслуживающих приборов.

Во **втором** разделе рассмотрены основные понятия сетей массового обслуживания (СеМО). СеМО делятся на однородные и замкнутые. По отношению к внешнему источнику заявки сети обслуживания делятся на *открытые* (СеМО имеют внешний источник заявок бесконечной емкости заявки поступают в сеть из источника, обслуживается в сети и возвращается источник, число заявок является дискретной случайной величиной), *замкнутые* (СеМО не имеет внешних источников заявок, число заявок, пребывающих в замкнутой СеМО, является постоянной величиной), *смешанные* (являются открытыми для одних классов заявок и замкнутые для других классов).

По типам функций распределения длительностей обслуживания заявки во входящих в сеть системах обслуживания сети обслуживания делятся на экспоненциальные и общего вида. В *экспоненциальной* СеМО длительности обслуживания заявок во всех СМО сети являются непрерывными случайными величинами с экспоненциальным распределением; разумеется, параметры этих функций распределения могут быть различными. В СеМО *общего вида* функции распределения длительностей обслуживания заявки в СМО могут быть произвольным.

В работе рассматривается однородная открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания, которая задается набором:

$$\Gamma = \langle L, l, \lambda_0, M, \Theta, \kappa, \mu, FCFS, 1, \pi \rangle.$$

Данная СеМО содержит L систем C_i, $i = 1, ..., L$, обслуживающих заявок одного класса, поступающие из внешнего источника C_0. Входящий в сеть поток заявок пуассоновский с интенсивностью λ_0. Система C_i, содержит κ_i параллельно работающих приборов, длительность обслуживания заявок имеет экспоненциальное распределение с параметрами μ_i, $i = 1, ...L$. Выбор в систему C_i очередной заявки на обслуживание производится из общей очереди неограниченной длины согласно дисциплине FCFS, $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 0, ...L$ – маршрутная матрица.

Рассмотрен стационарный режим функционирования сети, которой должен удовлетворять условию:

$$\lambda_i < \tilde{\mu}_i \qquad \text{или} \qquad \rho_i = \frac{\lambda_i}{\tilde{\mu}_i} < 1,$$

где λ_i – интенсивности входящего потока в системы C_i, $\tilde{\mu}_i = \kappa_i \mu_i$ – суммарная интенсивность обслуживания заявок системой C_i, $i = 1, ..., L$,. Если существует стационарный режим, то

$$\lambda_j = \sum_{i=0}^{L} \lambda_i \theta_{ij}, \qquad j = 0, 1, ..., L,$$

или

$$\lambda\Theta = \lambda,$$

что можно записать также в виде

$$\lambda(\Theta - I) = 0,$$

Система $\lambda(\Theta - I) = 0$ является системой $L+1$ линейных однородных уравнений с $L+1$ неизвестными λ_i (включая λ_0). Чтобы эта система имела нетривиальное решение $\lambda \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы была равен нулю. Это условие всегда выполняется, если прибавить какому-либо столбцу определитель сумму всех других столбцов, то, учитывая, что Θ – стохастическая матрица, получится столбец, содержащий только нули, из этого следует, что данный определитель равен нулю. Данная система в обоих случае имеет бесконечное число решений. Однако если считать известными λ_0, то λ_i, $i = 1, ..., L$ определяются единственным образом. Это имеет место, так как ранг системы в точности равен L (система имеет L независимых строк и столбцов). Поэтому для каждого значения λ_0 существует единственное решение

$$\lambda_i = \alpha_i \lambda_0, \qquad i = 1, ..., L.$$

Необходимые условием существования стационарного режим сети является неравенство

$$\alpha_i \lambda_0 < \tilde{\mu}_i \qquad \text{или} \qquad \lambda_0 < \tilde{\mu}_i / \alpha_i, \qquad i = 1, ..., L.$$

или

$$\lambda_0 < \min_{i=1,...,L} \tilde{\mu}_i / \alpha_i.$$

В работе рассмотрена **теорема Джексона**: *Если для сети* Γ, *определенной набором* $\gamma = \langle L, l, \lambda_0, M, \Theta, k, \mu, FCFS, 1, \pi, \rangle$, *выполнены условия:*

1)все входящие в сеть потоки пуассоновские;

2)все переходы заявок между системами в сети определяются маршрутной матрицей;

3)все длительности обслуживания заявок имеют экспоненциальное распределение, причем интенсивность обслуживания может зависеть от числа заявок в системе;

4)дисциплина выбора заявки из очереди в каждой системе не зависит от длительности обслуживания и маршрутов заявок,
то каждая система $C_i, i = 1, ..., L$, *функционирует, как независимая вероятностном смысле система массового обслуживания, и стационарные вероятности состояний сети имеют вид*

$$P(n) = \prod_{i=1}^{L} P_i(n_i), \qquad n \in E,$$

где E *– множество состояний сети,*

$$P_i(n_i) = P_i(0) \prod_{m=1}^{n_i} \frac{\lambda}{\alpha_i(m)\mu_i}$$

есть стационарные вероятности состояний систем C_i *типа* $M/M/k_i$, *рассматриваемых как взаимно независимые, с пуассоновскими входящими потоками с интенсивностями* $\lambda_i = \alpha_i \lambda_0$, *а* $\alpha_i(m) = \min(m, \kappa), m \geqslant 1$.

Доказательство теоремы приведено в работе.

Третий раздел посвящен расчету характеристик однородных открытых экспоненциальных СеМО. Интенсивность потока заявок, входящих в любую систему C_j сети, равна сумме, интенсивностей потоков заявок, поступающих в нее из других систем C_i, $i = 1, ..., L$. Тогда на входе системы C_j имеется поток с интенсивностью

$$\lambda_j = \sum_{i=0}^{L} \theta_{ij} \lambda_i, \quad i = 0, ..., L.$$

Рассчитываются системные характеристики:
ρ_i – коэффициент загрузки системы C_i, $i = 1, ..., L$;
$\bar{n}_i = \dfrac{\rho_i}{1-\rho_i}$ – среднее число заявок в системе C_i, $i = 1, ..., L$;
$\bar{b}_i = \dfrac{\rho_i^2}{1-\rho_i}$ – среднее число заявок в очереди системы C_i, $i = 1, ..., L$;
$\bar{u}_i = \dfrac{1}{\mu_i}\dfrac{1}{1-\rho_i}$ – среднее время пребывания заявки в системе C_i, $i = 1, ..., L$;
$\bar{w}_i = \dfrac{1}{\mu_i}\dfrac{\rho_i}{1-\rho_i}$ – среднее время пребывания заявки в очереди системы C_i, $i = 1, ..., L$.

А так же рассчитываются сетевые характеристики:

Среднее время ожидание и среднее время пребывания заявок в сети

$$W = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i \bar{w}_i; \qquad U = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i \bar{u}_i.$$

Четвертый разделе посвящен принципам построения имитационных моделей открытых сетей массового обслуживания. Имитационное моделирование есть процесс конструирования модели реальной сети и постановки экспериментов на этой модели с целью либо понять поведение сети, либо оценить (в рамках ограничений, накладываемых некоторым критерием или совокупностью критериев) различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной сети. Таким образом, процесс имитационного моделирования – это процесс, включающий и конструирование модели, и аналитическое применение модели для изучения некоторой проблемы.

Основными объектами имитационной модели являются программные процессы, фрагменты и очереди фрагментов. Каждой системе обслуживания C_i, $i = 1, ..., L$, в имитационной модели сети соответствует описание данной системе на языке $MATLAB$, оформленная в виде одной или множества процедур и называемых программными процессами. Источнику заявок C_0 соответствует отдельный процесс. Алгоритм состоит из последовательности «сегментов» алгоритма, реализующих определенный набор функций. Выполнение сегмента программного процесса соответствует реализации некоторого события, содержание которого определенно в сегменте.

Программные процессы, соответствующие одному типу систем обслуживания, считаются эквивалентными. Для эквивалентных процессов в имитационной модели целесообразно иметь только единственное программное представление процесса, называемое прототипом процесса. Сами процессы в этом случае называются копиями. Программный процесс может находится в активном и пассивном состояниях. Активны называется такое состояние процесса, когда в нем реализуется некоторая последовательность событий. Состояние ожидание процессом выполнения необходимых условий его активизации называется пассивным состоянием.

Фрагменты в имитационной моделях представлены объектами, наделенными существенными для моделей характеризующие значениями - атрибутами. В рассматриваемых имитационных моделях используется такие атрибуты фрагмента, как момент поступления фрагмента из источника, момент поступления фрагмента в систему, момент начала обслуживания фрагмента, момент завершения обслуживания в системе и момент возвращения фрагмента в источник.

Очереди фрагментов являются самостоятельными объектами имитационной моделей ОСеМО и служат для хранения ожидающих обработки фрагментов. Установление фрагментов в очередь и их выбор из очереди производится программными процессами, считается, что каждая очередь принадлежит конкретной системе обслуживания.

Процесс функционирования ОСеМО в имитационной модели представляется логически связной последовательностью событий, характеризуемой интервалами времени между событиями и типом событий. Управление работы имитационной модели обеспечивает ведущей программой, в ход выполнения которой используются данные о процессах из таблицы временных отметок, точке возврата и номер копий.

Модельное время в имитационной модели представлено глобальной переменной вещественного типа, принимающей значения на интервале $[0, \infty)$ и обеспечивающей имитацию параллельного развития процессов сети обслуживания.

В **пятом** разделе была построена математическая модель однородной открытой экспоненциальной сети массового обслуживания приведенной на рисунке 1.

В сеть поступает пуассоновский поток заявок, длительности обслужива-

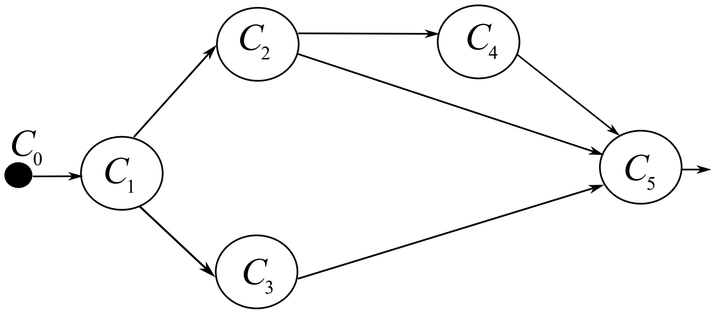

Рисунок 1 – Граф ОСеМО

ния заявок имеют экспоненциальное распределение. Все системы содержат по одному обслуживающему прибору. Заявка на обслуживание в каждой системе выбирается согласно дисциплине FCFS. Маршрутная матрица имеет вид

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить ρ_i, $\bar{b}_i$, $\bar{u}_i$, $\bar{w}_i$, W, U.

Для нахождения указанных характеристик в системе MATLAB была написана программа, реализующая работу такой сети.

Входными данными программы являются маршрутная матрица Θ, интенсивность входящего потока заявок (число заявок в час) λ_0, интенсивности обслуживания заявок в каждой системе (число заявок в час) μ_i, $i = 1, ..., L$, n колличество заявок.

Характеристики на основе дискретной модели считаются по следующим формулам:

коэффициент использования (загрузки) системы

$$\rho_i = \frac{\text{суммарное время обслуживания}}{\text{время моделирования}},$$

среднее число заявок в очереди (в часах)

$$\bar{b} = \frac{\text{суммарное время ожидания в очереди}}{\text{время моделирования}},$$

среднее время ожидания заявки в очереди (в часах)

$$\bar{w} = \frac{\text{суммарное время ожидания в очереди}}{\text{количество заявок}},$$

среднее время пребывания заявки в системе (в часах)

$$\bar{u} = \frac{\text{суммарное время пребывания заявок в системе}}{\text{количество заявок}},$$

среднее время ожидание заявок в сети

$$W = \frac{\text{суммарное время ожидания заявок в очереди}}{\text{интенсивность входящего потока заявок}},$$

среднее время пребывания заявок в сети

$$U = \frac{\text{суммарное время пребывания завок в системе}}{\text{интенсивность входящего потока заявок}}.$$

Для оценки полученных характеристик была написана программа в системе MATLAB, рассчитывающие те же параметры с использованием теоретических результатов раздела 3.

В **пятом** разделе проведен сравнительный анализ характеристик, полученных на основе дискретной модели, с аналогичными характеристиками полученными с помощью теоретических формул. Данные расчетов приведены в таблицах 1 и 2. На основании результатов, представленных в таблицах 1 и 2, видно, что при небольшом числе обслуженных заявок ($n = 100$) характеристики, полученные на основе дискретной модели отличаются от соответствующих характеристик, полученных по теоретическим формулам, в среднем на $35 - 40\%$, но если увеличить число заявок до $n = 1000000$, то теоретические и модельные характеристики отличаются друг от друга не более чем на 5%. Это говорит о том, что в первом случае не достигается стационарный режим.

Таким образом, полученная модель полностью имитирует работу ОСеМО с ожиданием, с пуассоновским входящим потоком и экспоненциальной длительностью их обслуживания, и в дальнейшем может быть применена для расчета экономических характеристик эффективности функционирования реальных сетей массового обслуживания.

Таблица 1. Расчет характеристик систем ОСеМО

C_1	ρ	$\bar{b}$	$\bar{u}$	$\bar{w}$
Теорет.	0.8333	4.1667	0.5000	0.4167
$n = 100$	0.8361	3.9632	0.5228	0.4317
$n = 1000000$	0.8314	4.1412	0.4979	0.4146
C_2				
Теорет.	0.5000	0.5000	0.2500	0.1250
$n = 100$	0.4133	0.2910	0.2051	0.08847
$n = 1000000$	0.5005	0.5037	0.2517	0.1263
C_3				
Теорет.	0.6000	0.9000	0.2500	0.1500
$n = 100$	0.5392	0.7081	0.2118	0.1203
$n = 1000000$	0.6014	0.9016	0.2506	0.1503
C_4				
Теорет.	0.9333	13.0667	5.0000	4.6067
$n = 100$	0.7568	1.8325	1.2695	0.1203
$n = 1000000$	0.9302	13.0901	4.5924	4.2594
C_5				
Теорет.	0.6667	1.3333	0.2000	0.1333
$n = 100$	0.4344	0.3184	0.0960	0.0406
$n = 1000000$	0.6668	1.3406	0.2010	0.1342

Таблица 2. Расчет характеристик ОСеМО

	W	U
Теорет.	1.9967	2.3500
$n = 100$	0.9253	1.2702
$n = 1000000$	2.0648	2.4179

В **заключении** приведены результаты бакалаврской работы.

Основные результаты

1. Определены основные понятия, связанные с системами массового обслуживания. Изучены системы обслуживания с ожиданием с пуассоновским

входящим потоком заявок и экспоненциальной длительностью их обслуживания.

2. Определены основные понятия сетей массового обслуживания. Рассмотрены однородные открытые экспоненциальные сети массового обслуживания.

3. Изучены системные и сетевые характеристики однородных открытых экспоненциальных сетей массового обслуживания.

4. Построена математическая модель изученной сети массового обслуживания. Рассмотрен конкретный пример однородной открытой сети массового обслуживания с пуассоновскими входящим потоком заявок и экспоненциальной длительностью их обслуживания с пятью обслуживающими системами. В системе MATLAB написана программа, моделирующая работу такой сети. Вычислены основные системные и сетевые характеристики. Для проверки полученных результатов рассмотренные характеристики были вычислены с использованием теоретических формул.

5. Проведен сравнительный анализ характеристик, полученных на основе дискретной модели, с аналогичными характеристиками, вычисленными по теоретическим формулам, для одних и тех же входных параметров.