Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математической экономики

Решение задачи оптимизации прибыли фирмы с производственной функцией Кобба-Дугласа методом условного градиента

Автореферат

Бакалаврская работа

студентки 4 курса 441 группы

направление 09.03.03 - Прикладная информатика

механико-математического факультета

Лихачевой Юлии Александровны

Научный руководитель
Д.ф.-м.н., профессор С.И.Дудов

Зав. кафедрой
Д.ф.-м.н., профессор С.И.Дудов

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Занимая высокие руководящие должности, человек (будь то наемный работник или руководитель собственного предприятия) сталкивается с проблемами, связанными с развитием бизнеса. Возникают вопросы о том, как увеличить объемы производства, сформировать команду профессионалов, наладить процесс управления таким образом, чтобы издержки были минимальными, а прибыль максимальной. При организации любой деятельности в первую очередь необходимо задаться вопросом: «Как удовлетворить потребности потребителя?», но вместе с ним появляется еще один немало важный: «Как получить максимальную прибыль с минимальными затратами?». Чтобы грамотно и с минимальными потерями времени найти ответ на второй вопрос, чаще прибегают к математическим методам оптимизации.

Для построения математических моделей требуется исследование экономических процессов в современном крупномасштабном производстве. Данные процессы учитывают внутреннюю структуру производства и для анализа можно получить большой объем информации, который будет необходим для дальнейшего построения модели и изучения динамики производства. Чтобы оперировать показателями, которые получаем с помощью отчетных данных о динамики и взаимосвязи укрупненных показателей, таких как объем основных и оборотных фондов, производительность труда, прибыль и рентабельность производства и т.п. можно стоить матрицы внутрипроизводственных затрат. Но построение данных матриц это довольно сложная задача, поэтому достаточно получать, собирать и анализировать необходимую информацию, а на ее основе делать соответствующие выводы о состоянии той или иной фирмы.

В области экономико-математических методов существует множество различных моделей и направлений, позволяющих проанализировать и оптимизировать работу предприятий. Одним из таких направлений является теория производственных функций. В настоящее время она идёт по пути совершенствования и модификации уже существующих моделей, а разработке новых, которые будут привносить что-то иное в теорию производственных функций, уделяется мало внимания. Поэтому **тема является актуальной**, так как стоит задача выбора такого математического метода, который предоставляет наибольший объем информации об искомом решении или же приводит к конечному результату с минимальными затратами на вычисления.

Актуальность и недостаточная разработанность проблемы определила **выбор темы исследования:** "Решение задачи оптимизации прибыли фирмы с производственной функцией Кобба-Дугласа методом условного градиента".

Цель исследования- изучение задачи оптимизации прибыли фирмы с производственной функцией Кобба-Дугласа и ее численное решение с помощью метода условного градиента. Данный метод используется при решении задач нелинейного программирования.

Объект исследования- задача оптимизации прибыли фирмы.

Предмет исследования- задача оптимизации прибыли фирмы с производственной функцией Кобба-Дугласа методом условного градиента.

В соответствии с целью исследования были сформулированы следующиезадачи:

- сбор и анализ информации по теории производственных функций;
- изучение задачи оптимизации производственной функции Кобба-Дугласа;
- выбор численного метода для приближенного решения задачи при наличии ограничений;
- написание программы, реализующей выбранный метод;

Теоретико-методологической основой исследования явились

- концепции, раскрывающие сущность задачи оптимизации прибыли фирмы (С. И. Дудов, И. Ю. Выгодчикова, С. Н. Купцов, Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В, 6. Замков О. О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н);
- концептуальные положения применения методов оптимизации на основе производственных функций (Б.И. Герасимов, Н.С. Косов, В.В. Дробышева, М.В. Грачевой, Л.Н. Фадеевой, Ю.Н. Черемных, Мицель А.А., Шелестов А.А.,Карманов В.Г.); технологий
- идея и схема метода условного градиента (Васильев Ф. П., Аббасов М. Э., Ю. А. Черняев, Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В);

Научная новизна исследования заключается в следующем:

- раскрыта значимость применения оптимизационных методов при решении задач оптимизации с производственными функциями, включая, функцию Кобба-Дугласа.
- изучен и реализован метод условного градинта для решения задачи оптимизации прибыли фирмы при наличии ограничений(краткосрочная задача)

Практическая значимость проделанной работы сосостоит в написании программы, которая дает приближенное решение краткосрочной звдвчи оптимизации прибыли методом условного градиента. Значимость реализации именно этого метода состоит в том, что он применяется для решения задач нелинейного программирования. Предприниматели заинтересованы в максимальном эффекте от использования ресурсов. Неэффективное использование ресурсов стараются не допускать. Поэтому ПФ отражает зависимость максимально возможного выпуска продукции от ресурсов, введенных в производство. Грамотное изучение материала приводит к положительным результатам ввиде прибыли. Поэтому написанную программу можно внедрядь на предприятия и включать ее в перечень инструментов для анализа производстводственной деятельности фирмы.

Достоверность результатов исследования обеспечивается сравнением с пакетом Microsoft Exel. В работе проведен сравнительный анализ полученных показателей при решении одних и тех же задач, но с применением разных инструментов. Так же, для проверки, задачи можно решить аналитическим путем, сведя их к задаче линейного программирования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Выпускная квалификационная работа состоит из введения,двух теоретических и практической главы, заключения, приложений и списка используемых источников.

В первой главе «Производственная функция и ее характеристики» раскрыты основные понятия,которые используются в ходе исследования: производство, деятельность фирмы, производственная функция, вектор затрат, пространство затрат.

Производственная функция рассматириватся со всеми характеристиками и видами.

Важно, чтобы ПФ объективно отражала моделируемую действительность, т.е. удовлетворяла содержательно логическим и экономическим требованиям. Основные из них:

- в число аргументов производственной функции должны быть включены все существенные для данного процесса факторы;
- все величины должны иметь отчетливый экономический смысл;
- все экономические величины, входящие в производственную функцию, должны быть измеримы;
- выпуск продукции без затрат невозможен; если величина какого-либо ресурса ограничена, то выпуск не может расти бесконечно
- увеличение затрат не может привести к уменьшению выпуска .

Предприятие может производить некоторый набор видов продукции. Однако ПФ отражает зависимость выпуска в целом от факторов производства, как правило, по их укрупненным группам. Примером неоклассической модели производства является двухфакторная производственная функция Кобба –Дугласа.

Производственная функция Кобба – Дугласа отражает зависимость объема производства чистой продукции (чистого дохода) от количества используемых ресурсов труда и капитала (затрат на их использование) и имеет мультипликативную форму.

Впервые функциональная взаимосвязь между объемом производства и объемом израсходованных ресурсов была использована в производственном анализе в 1928г., в статье американских ученых экономиста Питера Дугласа и математика Джорджа Кобба «Теория производства». В статье была предпринята попытка эмпирическим путем определить влияние величин затраченного капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США.

Рассмотрим такие свойства производственной деятельности предприятия в целом, которые необходимо отражать в математических моделях производства. Эти свойства выявлены в результате многочисленных эмпирических исследований экономики в рыночных условиях.

Для изготовления продукции требуются производственные ресурсы. В процессе производства можно установить зависимость выпуска продукции от необходимых для этого ресурсов. Выпуск продукции может быть измерен в натуральных или денежных единицах (объем реализации, доход). Объем выпускаемой продукции зависит от количества ресурсов, востребованных для производства. Ресурсы производства также могут быть измерены либо в натуральных, либо в денежных единицах. Применяемое для выпуска продукции количество ресурсов или их оплата являются факторами производства. Конкретная формула и параметры этой модели определяются типом производства, существующим уровнем технологий и управления, техническими и экономическими знаниями персонала, умением предпринимателей организовать бизнес и т.д.

Предприниматели заинтересованы в максимальном эффекте от использования ресурсов. Поэтому ПФ отражает зависимость максимально возможного выпуска продукции от ресурсов, введенных в производство. Это закон эффективного ведения хозяйства. В микроэкономической теории принято считать, что ПФ определены принципиальные границы максимально возможного выпуска продукции. ПФ должна отражать зависимость выпуска продукции от использования ресурсов при наиболее эффективном их применении. Отсюда следует, что она должна быть однозначной детерминированной функцией (не случайной, не размытой) выпуска продукции от факторов производства ПФ связывает выпуск продукции с использованием взаимозаменяемых ресурсов .

Факторами воздействия на производство являются только такие ресурсы, которые необходимо оплачивать. Фактор времени при этом в ПФ в явном виде отсутствует. Однако он очень важен, так как при помощи применяемых в настоящее время технологий за год можно выпустить одно количество продукции, а после введения новых технологий и организации производств при тех же затратах на оплату ресурсов можно произвести значительно больше продукции. Поэтому различают ПФ, которые отражают производство в краткосрочном или в долгосрочном периоде. В краткосрочном периоде возможно замещение только особо «подвижных» ресурсов. К числу наиболее динамичных ресурсов можно отнести различные виды сырья и материалов. В долгосрочном периоде может происходить обновление всех ресурсов, в том числе, замена технологических способов производства под воздействием научно-технического прогресса (НТП). Как правило, изменение технологических способов связано с реконструкцией предприятия и требует значительного времени. При этом ярко проявляется тенденция замещения трудовых ресурсов более производительным оборудованием, живого труда овеществленным.

1. Определить вид функций, наиболее точно выражающих количественные соотношения между тремя выбранными характеристиками производства.
2. Найти значения коэффициентов конкретной функции этого вида.
3. Проверить достоверность значений функции, сравнив их с фактическими данными.

Учеными была предложена, функция, которая носит название функции Кобба-Дугласа. Именно ей в работе уделено особое внимание.

Во второй главе «Задача оптимизации прибыли производственной функции» рассматриваем математическую формализацию задачи оптимизации прибыли, раскрываем смысл теоремы Куна-Таккера и показываем как возможно ее использовать при решении задачи оптимизации прибыли с помощью производственной функции Кобба-Дугласа. Для более глубокого понимания знакомимся с геометрической интерпретацией решения задачи оптимизации фирмы.

Рассматриваем задачу оптимизации прибыли фирмы-товаропроизводителя. При математической формализации этой задачи используется понятие производственной функции.

Пусть фирма использует в производстве n видов ресурсов в количествах $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T = R_+^n$ соответственно и изготавливает один вид продукции [2].

Считаем, что производственная функция фирмы удовлетворяет неоклассическим требованиям [4]. Градиент производственной функции содержит предельные продукты ресурсов.

Пусть $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in R_+^n$ – цены на ресурсы. Тогда переменные издержки составляют $<w, x>$. Обозначим через $_0$ постоянные издержки фирмы, $p > 0$ – цену на реализацию готовой продукции. Тогда от продажи изготовленной продукции фирма получит прибыль [1]

$$\Pi(\text{x}) = pf(x) - < w, x > - c_0. \tag{1}$$

Поскольку постоянные издержки не зависят от объема вовлекаемых в производство ресурсов, то получаем задачу:

$$pf(x) - < w, x > \to \max_{x \in T}. \tag{2}$$

Оптимальный набор ресурсов обозначим через $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$. Таким образом, перед фирмой стоит задача выбора: в каких количествах применять ресурсы в производстве, чтобы достичь максимальной прибыли [3].

В третьей главе «Численное решение задачи методом условного градиента» делаем теоретические введение в метод условного градиента для того, чтобы в дальнейшем производить вычисления.

В этом методе получение точки очередного приближения x_{k+1}по уже полученному приближению x_k решения задач минимизации дифференцируемой функции $f(x)$ на множестве X состоит в следующем: в точке x_k линеаризуют функцию $f(x)$, строя линейную функцию $f_L(x) = f(x_k) + < f'(x_k), x - x_k >$, и затем, минимизируя $f_L(x)$ на множестве X, находят точку y_k. После этого полагают $-s_k = y_k - x_k$ и далее вдоль этого направления осуществляют спуск. Таким образом, для отыскания направления $-s_k$ следует решить задачу минимизации линейной функции на множестве X. В общем случае эта задача того же порядка сложности, что и исходная. Однако, когда допустимое множество задается линейными ограничениями, она становится задачей линейного программирования.

Следующим пунктом стало написание программы, которая дает приближенное решение задачи оптимизации прибыли фирмы методом условного градиента. При написании программы использовался объектно-ориентированный язык программирования C++.

В соответствии с целями работы был сформулирован ряд задач, которые необходимо выполнить для достижения желаемого результата. Одной из таких задач стала реализация метода условного градиента для решения ЗНП.

Приведем самые важные моменты кода и дадим комментарии к ним. Перед тем как приступать к реализации освного метода необходимо ввести несколько проверок:

- проверка пренебрежительно малых значений ;
- проверка точки начального приближения ;
- проверка точки на удовлетворение ограничениям ;

Данные проверки требуется для того, чтобы избежать неточности в ответах.

В результате получили метод условного градиента, который подсчитывает оптимальное значение функции с линейными и нелинейными ограничениями. На экран пользователю выводится: заданная начальная функция с ограничениями; подсчитанные значения неизвестных показателей и значение целевой функции. На этом этапе можем считать, что задача по программной реализации метода условного градиента выполнена и работает успешно. В следующем пункте используем данный метод для решения экономических задач и рассмотрим прммер того, как можно использовать получаемые значения при анализе производства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными производственными ресурсами являются труд и капитал. Способы производства определяют, какой объем продукции выпускается при заданном количестве труда и капитала. Чтобы облегчить расчеты, математические технологии выражаются через ПФ, которая описывает множество существующих в данный момент технологий. Если изобретается лучшая технология, то при тех же затратах труда и капитала объем выпуска увеличивается. Следовательно, изменения в технологии изменяют и ПФ. Проследить эти изменения и составить аналитический обзор для предприятия можно с использованием метода условного градиента.

При написании выпускной квалификационной работы был рассмотрен ряд вопросов, связанных с видами и характеристиками ПФ, опитимизацией прибыли, релизацией метода условного градиента и т.д. Основной целью являлась практическая реализация метода условного градиента. На основе этого метода были исследованы на минимум несколько различных функций, в том числе ПФКД. Проводя анализ решения поставленной задачи, можно сказать, что данный метод нашел точное численное решение для заданных функций и ,следовательно, поставленная цель была достигнута.

Также можно убедиться, что программа является вспомогательным компонентом при анализе деятельности на предприятии. Она служит связующим элементом, подсчитывая неизвестные показатели, которые можно использовать в дальнейшем развитии и распределении ресурсов.

Существует множество различных способов расчета неизвестных показателей функции, но реализованный метод условного градиента не имеет аналогов, так как спроектирован не под конкретную функцию, а под любую, которую предложит пользователь. В дополнение, метод работает как с линейными, так и нелинейными ограничениями. Именно условие работы с ограничениями дает основную уникальность разработки, т.к. функцию с линейными ограничениями можно решить практически любым методом, который уже реализован и используется на практике, за несколько секунд , в то время как с нелинейными ограничениями не так все просто. Данный продукт справляется с этими ограничениями за несколько итераций, в зависимости от сложности функции, и завершает подсчет за несколько секунд, что позволяет не обращать внимание на ограничения, с которыми можно столкнуться на практике.

Таким образом, поставленые задачи можно считать выполненными, а цель исследования достигнутой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Дудов С. И. Математические методы в экономике: Учеб. пособие для студентов экон.-мат. спец./ С. И. Дудов, И. Ю. Выгодчикова, С. Н. Купцов. М.: Наука, 2014. 93 с.

2 Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации / А.Г Сухарев , А.В. Тимохов, В.В. Федоров. М.: Наука, 2005. 368 с.

3 Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. М.: Факториал Пресс, 2002. 434 с.

4 Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления / под. общ. ред. М.В. Грачевой, Л.Н. Фадеевой, Ю.Н. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 351 с.

5 Аббасов М. Э. Методы оптимизации: Учеб. пособие / М. Э. Аббасов. СПб.: Издательство “ВВМ”, 2014. 64 с.