Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической экономики

Реализация методов динамического программирования

для решения задачи оптимального роста

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 441 группы

направления (специальности) 09.03.03 Прикладная информатика

Механико-математический факультет

Долговской Юлии Алексеевны

Научный руководитель
Д.ф.-м.наук, доцент С.П. Сидоров

Зав. кафедрой
Д.ф.-м.наук, профессор, С.И. Дудов

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

В 1940-х годах американский математик Ричард Эрнест Беллман впервые использовал такое словосочетание как «динамическое программирование» для того, чтобы описать нахождение решения задачи, где можно получить ответ одной задачи только тогда, когда будет решена «предшествующая» ей. Но уже в 1953 году Р. Беллман уточнил это определение до современного. Основной его работой является уравнение Беллмана. Оно применялось к теории управления, междисциплинарной области инженерии и математики, а также к другим темам в области прикладной математики. Уравнение Беллмана также затронуло и экономическую теорию, в ней это уравнение стало важным инструментом.

Динамическое программирование – это совокупность методов, с помощью которых осуществляют поиск оптимальных решений. Основой этих решений является вычисление их последствий и разработка оптимальной стратегии для последующих решений.

Смысл динамического программирования достаточно прост. Для решения имеющейся задачи необходимо разбить её на подзадачи и объединить их решение в одно общее. Но можно столкнуться с тем, что подзадачи бывают одинаковыми. Цель подхода динамического программирования и заключается в том, чтобы каждая подзадача была решена один раз, что, в свою очередь, уменьшает количество вычислений.

Вопросы, касающиеся использования динамического программирования в различных областях экономики и менеджмента, являются актуальными в настоящее время. Из-за высокой востребованности в решении управленческих задач проводятся многочисленные исследования этих вопрос отечественными и зарубежными математиками и экономистами.

Разработан ряд методов и моделей, предназначенных для предприятий и различного характера. Это говорит о том, что этот метод является востребованным и необходимым для решения многих управленческих задач.

Целью данной работы является:

1. Изучение теоретических основ динамического программирования для детерминированного и стохастического случая;

2. Применение его численных методов для решения экономических задач;
3. Реализация одного из методов в виде алгоритма решения задачи оптимального роста с помощью программной среды Scilab.

В первом разделе данной работы вводится общее понятие динамического программирования, рассматривается эвристический вывод уравнения Беллмана и доказываются теоремы, связанные с этим уравнением: принцип сжимающих отображений и достаточные условия Блэквелла.

Во втором разделе рассматривается неоклассическая модель роста, которая разбивается на задачи с конечным и бесконечным горизонтом. Для них приводится уравнение Беллмана и его решение. Также рассматривается применение к задаче оптимального роста достаточного условия Блэквулла.

В третьем разделе описывается численные методы детерминированного программирования, основанные на принципе сжимающих отображений, для решения уравнения Беллмана. К ним относятся итерация по критерию и применение к ней интерполяции, причём кубическим сплайном, итерация по стратегиям с использованием метода Говарда.

Четвёртый раздел посвящён стохастическому динамическому программированию. Рассматриваются такие вопросы как дискретизация шоков, уравнение Беллмана с его выводом и методы его решения: итерация по критерию и итерация по стратегиям.

В пятом разделе в качестве примера задачи динамического программирования берётся задача оптимального роста с дискретным временем и непрерывным состоянием. Для неё рассматривается численный метод решения, который реализуется с помощью языка программирования Scilab для двух разных способов приближения: многочленами Чебышева и многочленами Бернштейна. И в результате делается вывод о работе алгоритмов с применением этих двух подходов.

Краткое содержание работы

В первом разделе даётся определение динамического программирования, рассматривается эвристический вывод уравнения Беллмана и доказываются теоремы связанные с этим уравнением: принцип сжимающих отображений и достаточные условия Блэквелла.

Уравнение Беллмана, которое является основой динамического программирования, имеет следующий вид:

$$V(x_t) = \max_{y_t \in D(x_t)} u(y_t, x_t) + \beta V(x_{t+1}),$$

где y_t – управляющая переменная, x_t – переменная состояния, предполагающая при заданном x_0, что $x_{t+1} = h(x_t, y_t)$, $u(y_t, x_t)$ – дисконтированная сумма будущих выплат, а $V(x_t)$ – функция ценности.

Решение уравнения Беллмана состоит в нахождении неподвижной точки или во введении такого оператора T, который находил бы эту неподвижную точку следующим образом:

$$V_{i+1} = TV_i,$$

где T - перечень операций, участвующих в расчете уравнения Беллмана.

Алгоритм решения состоит в следующем:

1. Сделать начальное предположение о функции ценности $V_0(x_t)$.
2. Определить $V_{i+1}(x_t)$, используя уравнение Беллмана:

$$V_{i+1}(x_t) = \max_{y_t \in D(x_t)} u(y_t, x_t) + \beta V_i(h(x_t, y_t)).$$

3. Если $V_{i+1}(x_t) = V_i(x_t)$, то будет найдена неподвижная точка, и задача будет решена. Иначе следует вернуться к пункту 2 и повторять процесс до равенства в точке.

Существование и единственность решения данного уравнение доказывается принципом отражающих отображений.

Теорема 1. *(Принцип сжимающих отображений).* Если пара (S, ρ) является полным метрическим пространством и $T \colon S \to S$ является сжимающим отображением с модулем $\beta \in (0, 1)$, то:

1. T имеет ровно одну фиксированную точку $V \in S$ такую, что $V = TV$.

2. Для любого $V \in S : \rho(T^n V_0, V) < \beta^n \rho(V_0, V), n = 0, 1, 2\ldots$

Теорема 1 устанавливает, что любой оператор, который обладает свойством сжатия, будет показывать единственную неподвижную точку. Также эта теорема даёт фактический метод приближенного нахождения решения уравнения Беллмана. Помимо прочего, принцип сжимающих отображений нашёл своё применение при построении итерационных процессов. [1]

Чтобы обеспечить условия для функции сжатия рассмотрим теорему, представляющую собой достаточные условия Блэквелла.

Теорема 2. *(Достаточные условия Блэквелла).* Пусть X – метрическое пространство и $B(X)$ – пространство ограниченных, непрерывных функций $V \colon X \to R$. А $T \colon B(X) \to B(X)$ является оператором, удовлетворяющим следующим условиям:

1. (Монотонность) Если $V, W \in B(X)$ и $V(x) \leq W(x)$ для всех $x \in X$, то $TV(x) \leq TW(x)$ для всех $x \in X$.
2. (Дисконтирование) Существует некоторая константа $\beta \in (0, 1)$, такая, что для всех $V \in B(X)$, $a \geq 0$ и любых $x \in X$:

$$T(V + a) \leq TV + \beta a$$

Тогда оператор T является сжимающим отображением с модулем β.

Теорема 2 даёт простые инструменты для проверки, будет ли рассмотренная задача задачей сжатия, а, значит, позволяет убедиться, является ли простой алгоритм, определённый ранее, подходящим для имеющейся задачи. [2]

Во втором разделе рассматривается неоклассическая модель роста, которая разбивается на задачи с конечным и бесконечным горизонтом. Для них приводится уравнение Беллмана и его решение. Также рассматривается применение к задаче оптимального роста достаточного условия Блэквулла.

Допустим, что есть социальный планировщик, который максимизирует полезность репрезентативное домохозяйство:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \frac{L_t}{H},$$

где H - фиксированное количество идентичных домохозяйств, L_t – общая численность населения, $\frac{L_t}{H}$ – количество представителей каждого домохозяйства, $0 < \beta < 1$ – дисконтирующий множитель, c_t – потребление каждого члена домохозяйства в момент времени t, $u(c)$ – мгновенная функция полезности. Будем считать, что $L_t = H$ для всех t. При этом соблюдаются условия технологии:

$$Y_t = F(K_t, L_t),$$

где Y_t – общий объём производства продукции, K_t – основной капитал, а функция F – постоянная норма прибыли при росте масштабов производства. Также учитывается совокупное ограничение на количество продукции, взятое на душу населения:

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t,$$

где $F(K_t, L_t) = L_t f(k_t)$, при $k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}$ и $f(k_t) \equiv F(K_t, 1)$, $c_t = \frac{C_t}{L_t}$, $k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} * \frac{L_{t+1}}{L_t}$, при чём $C_t = L_t c_t$ – общее потребление, $0 < \delta < 1$ – норма амортизации. Так как население является постоянным, и каждое домохозяйство имеет по одному члену, то эта задача эквивалентна выбору социального планировщика $\{\, c_t, k_{t+1} \,\}_{t=0}^{\infty}$ для максимизации:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t),$$

при условии $k_{t+1} \geq 0$, $c_t \geq 0$ для $t \geq 0$ и уже данного $k_0 \geq 0$.

То есть задачу социального планирования можно переписать в виде:

$$\max_{\{\, k_{t+1} \,\}_{t=0}^{\infty}} \beta^t u(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}),$$

с условием, что $0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t) + (1-\delta)k_t$, для $t \geq 0$ и уже данного $k_0 \geq 0$.

Опустив индексы и обозначение ∞ в рассматриваемой задаче, уравнение Беллмана будет выглядеть следующим образом:

$$V(k) = \max_{k'} u(f(k) + (1-\delta)k - k') + (k'),$$

при условии, что $0 \leq k' \leq f(k) + (1-\delta)k$ и уже дано k, $k' = f(k) + (1-\delta) - c$.

Задача с конечным горизонтом планирования отличается от рассмотренной тем, что на индекс t накладывается ограничение, то есть $t \in [0; T]$.

Данная модель роста удовлетворяет достаточным условиям Блэквелла для сжимающего отображения, что означает существование и единственности функции ценности. Поэтому на примере этой модели рассматриваются численные методы решения уравнения Беллмана.

В третьем разделе описываются численные методы детерминированного программирования, основанные на принципе сжимающих отображений, для решения уравнения Беллмана. К ним относятся итерация по критерию и применение к ней интерполяции, итерация по стратегиям с использованием метода Говарда.

Первым рассмотренным методом является итерация по критерию, заключающая в итерации относительно оператора T, такого, что $V_{i+1} = TV_i$, вплоть до точки, где расстояние между двумя последующими функциями ценности достаточно мало. Начать стоит с того, что сделать начальное предположение для функции ценности в каждой точке капитала. Далее вычисляется первая итерация функции ценности с учётом будущей стоимости в качестве начального предположения. Это даст новое значение – сумму текущей и будущей выплаты. Его можно использовать в качестве будущей стоимости в следующей итерации для получения нового значения и т.д.

Возможное усовершенствование предыдущего метода - это использование более широкой сетки основного капитала и более мелкой для управляющей переменной. Тогда значение переменной состояния следующего периода времени можно вычислить более точно. Однако, из-за этой точности и факта, что сетка неравномерная, может быть, что вычисленное оптимальное значение переменной состояния следующего периода не лежит на сетке значений, такой, что функция ценности неизвестна при этом конкретном значении. Поэтому используем любую интерполяционную схему, чтобы получить аппроксимацию функции ценности при этом значении. Преимущество метода состоит в том, что он включает в себя меньшее количество вычислений функции.

Итерация по критерию имеет привлекательную особенность в простоте реализации. Но, это медленная процедура особенно для задач с бесконечным горизонтом. Этот метод вычисляет ненужные величины, замедляющие сходимость. Таким образом, хотелось бы иметь возможность ускорить сходимость алгоритма. Этого можно достичь с помощью метода Говарда. Этот подход отличается тем, что в нём итерация совершается относительно стратегии, а не функции ценности.

Четвёртый раздел посвящён стохастическому динамическому программированию. Рассматриваются такие вопросы как дискретизация шоков, уравнение Беллмана с его выводом и методы его решения: итерация по критерию и итерация по стратегиям.

Для стохастического случая определяется такая функция ценности, в которой в качестве аргумента выступает не только переменная состояния x_t, но и стационарный шок s_t, причём последовательность $\{ s_t \}_{t=0}^{+\infty}$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$s_{t+1} = \phi(s_t, \epsilon_{t+1}),$$

где ϵ – белый шум, то есть случайный процесс, у которого $M(\epsilon) = 0$ и $D(\epsilon) = \sigma^2$.

Поэтому уравнение Беллмана для этого случая выглядит следующим образом:

$$V(x_t, s_t) = \max_{y_t \in D(x_t, s_t)} u(y_t, x_t, s_t) + \beta M_t V(x_{t+1}, s_{t+1}).$$

Одной из проблем, возникающей при сталкновении с итерацией по критерию и итерацией по стратегии в стохастической среде, является дискретизация пространства, порождённого шоками. Использование непрерывной поддержки стохастических шоков является невыполнимым для компьютера, имеющим дело только с дискретной поддержкой. Поэтому необходимо преобразовать непрерывную задачу в дискретную с таким ограничением, чтобы асимптотические свойства непрерывных и дискретных процессов были одинаковыми. Таким образом,сталкиваемся с вопросом: существует ли дискретное представление для S, эквивалентное его непрерывному исходному представлению? Ответ на этот вопрос утвердительный. В частности, если имеем дело с процессами авторегрессии AR(1), то можно воспользоваться таким мощным инструментом как цепи Маркова.

Она представляет собой стохастический процесс с дискретным индексированием S, таким, что условное распределение s_{t+1} является независимым от всех предыдущих достигнутых состояний, дающих s_t:

$$\pi_{ij} = P(s_{t+1} = s_j \mid s_t = s_i), \quad s_i, s_j \in S.$$

Все элементы модели цепи Маркова могут быть закодированы в матрице вероятности перехода:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \dots & \pi_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{M1} & \dots & \pi_{MM} \end{pmatrix}$$

Как и для детерминированного случая, так и для стохастического применяются итерация по критерию и итерация по стратегиям. Сходимость процесса первого метода обеспечивается принципом сжимающихся отображений. Стохастический случай не имеет существенных отличий за исключением того, что в нём ещё выбирается сетка значений шоков s вместе с матрицей перехода $\Pi = \pi_{ij}$, и в итерации по стратегиям имеем дело с различными правилами принятия решений.

В пятом разделе за примера задачи динамического программирования берётся задача оптимального роста с дискретным временем и непрерывным состоянием. Для неё рассматривается численный метод решения, реализующийся с помощью программной среды Scilab для двух разных способов приближения: многочленами Чебышева и многочленами Бернштейна. И в результате делается вывод о работе алгоритма с применением этих двух подходов.

Для задачи оптимального роста уравнение Беллмана выглядит следующим образом:

$$V(k) = \max_{k' \in K} u(F(k) - k') + \beta V(k'),$$

где k и k' – величины капитала в текущем и следующем периоде времени, K – множество допустимых значений k', $u(\cdot)$ – функция полезности, $c = F(k) - k'$ есть объём потребления в текущий момент, $F(k)$ – производственная функция. [3]

Будем считать, что функция полезности имеет следующий вид:

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma},$$

при этом функцию потребления определим как:

$$c = k^{\alpha} + (1-\delta)k - k^{'},$$

где α, β, σ и δ - некоторые параметры модели, то есть коэффициент эластичности по капиталу, коэффициент дисконтирования, коэффициент эластичности предельной полезности по потреблению и норма амортизации соответственно. Тогда уравнение Беллмана можно переписать в следующем виде:

$$V(k) = \max_{(1-\delta)k \le k' \le k^{\alpha}+(1-\delta)k} \frac{(k^{\alpha} + (1-\delta)k - k^{'})^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \beta V(k^{'}).$$

Для решения этой задачи используют алгоритм с итерацией функции ценности. В нём применяется аппроксимация функции ценности элементами некоторого параметрического семейства функций $\tilde{V}(x, \Theta)$, где Θ – вектор значений параметров. Алгоритм представляет собой итерационный поиск функции из заданного параметрического класса, причём эта функция будет удовлетворять рассмотренному уравнению Беллмана с заданной точностью.

Если в качестве метода приближения будет взята аппроксимация по Чебышеву, то это приведёт к отсутствию стабильной работы алгоритма, так как многочлены Чебышева не делают каких-либо предположений о форме функции ценности. То есть в этом методе отсутствует такой принцип как сохранение формы функции. Поэтому в качестве формосохраняющего метода будем использовать метод, основанный на применении многочленов Бернштейна:

$$B_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) C_m^i x^i (1-x)^{n-i},$$

где $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ - число сочетаний из n по i. [4]

С помощью программной среды Scilab были реализованы алгоритмы для решения задачи оптимального роста на основе этих двух подходов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, динамическое программирование представляет собой математический метод, с помощью которого осуществляется поиск оптимального решения для управления многошаговыми процессами. Под этими процессами подразумевается такие, при которых происходит последовательный переход объекта или системы из одного состояния в другое, причём эти состояния изменятся во времени или поэтапно.

В ходе данной работы было рассмотрено динамическое программирование, основой которого является уравнение Беллмана. При этом динамическое программирование приведено для двух случаев: детерминированного и стохастического. Для обоих случаев были предложены численные методы, основанные на принципе сжимающих отображений, которые можно применить для решения такой задачи как задача оптимального роста.

С помощью программной среды Scilab были реализованы алгоритмы решения этой задачи, в которых на шаге аппроксимации применяются два подхода: приближение с помощью линейной комбинацией многочленов Чебышева и приближение с помощью многочленами Бернштейна. Так как в аппроксимации по Чебышеву отсутствует принцип сохранения формы функции, то именно поэтому приводится формосохраняющий метод на основе применения полиномов Берштейна.

В результате работы алгоритмов для решения задачи оптимального роста получили, что использование многочленов Бернштейна приводит к более стабильной работе по сравнению с методом приближения на основе линейной комбинации многочленов Чебышева. С другой стороны, ошибка приближения полиномами Бернштейна является высокой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Беллман, Р. Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. — С. 400.

2. Judd, K.L. Numerical methods in economics. — Cambridge, Massachussets: MIT Press, 1998.

3. Бойцов Д. И., Сидоров С. П. Алгоритмы формосохраняющего динамического программирования для решения задачи оптимального роста // Математическое моделирование в экономике и управлении риска: материалы III Междунар. Молодежной науч.-практ. конф. Саратов. — 2014. — С. 44–49.

4. Cai, Y. Judd K. L. Shape-preserving dynamic programming. — Math. Meth. Oper. Res., 2013. — P. 407–421.