Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Об одном обобщении системы Фабера-Шаудера

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 228 группы
направления 020401 – математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Чумаченко Сергея Алексеевича

Научный руководитель
профессор каф. мат. анализа,
д. ф.-м. н., профессор ____________________ С.Ф.Лукомский
дата, подпись

Заведующий кафедрой
профессор каф. мат. анализа,
д. ф.-м. н., профессор ____________________ Д.В. Прохоров
дата, подпись

Саратов 2016 год

1 Введение

Система Фабера-Шаудера[1] - это система, состоящая из непрерывных функций, является одним из простейших базисов в пространстве $C[0,1]$. Впоследствии ряд авторов [5]-[10]изучали различные свойства разложений функций в ряд по этой системе. Главные достоинства этой системы состоят в том, что она является базисом в пространстве $C[0,1]$, а ее коэфициенты легко вычисляются.

Стоит отметить, что частичные суммы, построенные по системе Фабера-Шаудера, состоящей из отрезков линейной функции, не являются дифференцируемыми на отрезке $C[0,1]$. Было много попыток построить аналог системы Фабера-Шаудера, в которой базис конструировался из дифференцируемых функций. В частности, можно отметить работу К.М.Шайдукова[2] и работу Мильмана, Рутмана, Крейна [4]. Однако получающиеся базисы аналитически трудновыразимы и не могут быть использованы при цифровой обработке.

Так же стоит отметить, что частичные суммы по системе Фабера-Шаудера не обладают свойством гладкости. Были попытки построения аналогичной Фаберу-Шаудеру системы и в этом направлении. Среди прочих стоит отметить работу Т.У.Аубакирова и Н.А.Бокаева[3]. Однако эта система, в свою очередь, не является дифференцируемой.

Задача о построении системы, которая была бы базисом в $C[0,1]$, а ее частичные суммы были бы дифференцируемыми, гладкими и не сложными для цифровой обработки - актуальная задача. Построению такой системы и посвящена данная работа.

2 Основное содержание работы

В параграфе 1 приведено доказательство, что классическая система Фабера-Шаудера является базисом в пространстве $C[0,1]$.

В параграфе 2 рассматривается система Франклина, которая является ортогонализированным аналогом системы Фабера-Шаудера

В параграфе 3 рассматривается система, построенная Шайдуковым. Эта система построена на дифференцируемых функциях. Приводится доказательство, что эта система так же является базисом в $C[0,1]$

В параграфе 4 рассматривается система Мартенса-Терехина. Доказывается, что эта система является базисом в пространстве $C[0,1]$

В параграфе 5, который является основным, построен новый аналог системы Фабера-Шаудера и доказана базисность этой системы в $C[0,1]$.

Так же показано, что базисная функция в этой системе является результатом интегрирования базисной функции Мартенса-Терехина. Изложим этот результат более подробно.

Рассмотрим функцию Уолша w_3. Проинтегрировав эту функцию 2 раза, получим функцию

$$\varphi(x) = 16 \int_0^x \int_0^y w_3(t) dt dy * \chi[0,1](x) \tag{1}$$

нормированную в $[0,1]$, где $\chi_{[0,1]}(x)$-характеристическая функция отрезка $[0,1]$. Определим теперь аналоги функции Фабера-Шаудера равенствами:

$$\varphi_{2^n+k}(x) = \varphi_{(n,k)}(x) = \varphi(2^n x - k + 1); n = 0, 1, \ldots; k = 1, 2, \ldots 2^n \tag{2}$$

$$\varphi_0(x) = \varphi(x/2 + 1) * \chi_{[0,1]}(x), \varphi_1(x) = \varphi(x/2) * \chi_{[0,1]}(x). \tag{3}$$

3 Заключение

В данной работе определена система функций как система сжатий и сдвигов одной функции, которая есть второй интеграл от третьей функции Уолша. Доказана гладкость и дифференцируемость этой функции. Доказано также, что построенная система является базисом в пространстве $C_0[0,1]$ непрерывных функций, исчезающих в точках 0 и 1. Если к полученной системе добавить функции φ_0 и φ_1, то система будет являться базисом в $C[0,1]$ Данная система является аналитически легко выражаемой и легко транспонируется для компьютерного применения.

4 Список использованной литературы

1 Б.С.Кашин, А.А.Саакян. Ортогональные ряды. «АФЦ», Москва, 1999, 560с.

2 К.М.Шайдуков. Ученые записки Казанского университета, 1965, том 125, книга 2, 133с

3 Т.У.Аубакиров, Н.А.Бокаев. Математические заметки. 2007, том 82 выпуск 5, 643с.

4 М.Крейн, Д.Мильман, М.Рутман. Об одном свойстве базиса в пространстве Банаха. Зап. мат. т-ва, (4) 16. Харьков, 1940.

5 П.Л.Ульянов, “О некоторых свойствах рядов по системе Шаудера”, Матем. заметки, 7:4 (1970), 431–442.

6 Z.Ciesielski, “Some properties of Schauder basis of space C[0, 1]”, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 8 (1960), 141–144.

7 В.А.Матвеев, “О рядах по системе Шаудера”, Матем. заметки, 2:3 (1967), 267–278.

8 С.В.Бочкарев, “О рядах по системе Шаудера”, Матем. заметки, 4:4 (1968), 453–460.

9 Т.Н.Сабурова, “О некоторых свойствах коэффициентов Фурье по системе Фабера–Шаудера”, Сообщ. АН ГССР, 82:2 (1976), 297–300.

10 А.П.Горячев, “О коэффициентах Фурье по системе Фабера–Шау- дера”, Матем. заметки, 15:2 (1974), 341–352

11 Мартенс Р.В.О системе сжатий и сдвигов функции, связанной с системой Фабера –Шаудера//Современные методы теории краевых задач. Матерaлы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XXIII»-Воронеж: Издательско-полигра- фический центр Воронежского государственного университета, 2012, с.118-119.

12 Мартенс Р.В. Об одной полной системе сжатии и сдвигов// Труды математического центра им.Н.И.Лобачевского – Казань:Изда- тельство Казан. матем. об-ва, 2012.-Т.45.:Лобачевские чтения –2012: материалы XI молодежной научной школы-конференции. С.139-141.

13 Мартенс Р.В. О кусочно-линейной аппроксимации в интегральной метрике. //Всероссийский конкурс научно-иследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук:.сборник работ победителей. – Ульяновск, УлГУ, издательский центр УлГУ, С.24-26, 2012.