Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и приближений

Решение задачи о замене оборудования с помощью теории управляемых марковских цепей с доходами

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы

направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

Механико-математического факультета

Дрозденко Екатерины Анатольевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ____________________ И.А. Кузнецова

Заведующий кафедрой
доцент, д.ф.-м.н. ____________________ С.П. Сидоров

Саратов 2016

Введение

Во всем мире существует множество предприятий, которые используют для производства своей продукции машинное оборудование. При его внедрении в производство нужно составлять оптимальный план использования и замены оборудования.

Задачи по замене оборудования рассматриваются как многоэтапный процесс, который характерен для динамического программирования. Многие предприятия сохраняют или заменяют оборудование по своей интуиции, не применяя методы динамического программирования. Применять эти методы целесообразно, так как это позволяет наиболее четко максимизировать прибыль или минимизировать затраты.

Задача о замене оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены старого оборудования. Критерием оптимальности является либо прибыль от эксплуатации оборудования, либо суммарные затраты на эксплуатацию в течение планируемого периода.

Целью работы является построение алгоритма для решения задачи о замене оборудования, используя метод динамического программирования.

К основным задачам данной работы можно отнести:

- изучение теории цепей Маркова;
- разработка алгоритма динамического программирования;
- реализация алгоритма на выбранном языке программирования.

Основная часть работы состоит из трёх разделов. В первом разделе вводятся основные определения и понятия теории цепей Маркова, формулируются и доказываются несколько важных теорем.

Во втором разделе описываются неуправляемые марковские цепи с доходами, формулируется и объясняется определение такого понятия, как полный ожидаемый доход. Так же в этом разделе для него даётся описание поведения при стремлении длительности рассматриваемого периода времени в бесконечность.

В третьем разделе рассматривается управляемая марковская система с доходами на конечном и бесконечном интервале времени. Описывается метод динамического программирования Беллмана для системы на конечном интервале, а на бесконечном - метод Ховарда, позволяющий за конечное число итераций решать задачи большого «объема». Далее в этом разделе формулируется задача о замене оборудования, описывается алгоритм её решения методом динамического программирования Беллмана, а так же приводится решение этой задачи для некоторого набора значений и делаются определённые выводы.

Основное содержание работы

Рассмотрим некоторую систему, которая может находиться в одном из несовместных состояний $\xi = i$ конечного пространства возможных состояний $S = \{1, 2, \ldots, N\}$. В процессе своего функционирования система в дискретные моменты времени, называемые шагами и обозначаемые через $n = 0, 1, 2, \ldots$, переходит из одного состояния ξ_n в другое ξ_{n+1}. Смена состояний происходит по следующему закону: в нулевой момент времени ($n = 0$) вероятности начальных состоянии равны $\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \ldots, \pi_N^{(0)}$ а затем на любом шаге n условная вероятность перехода системы, находящейся в состоянии $\xi_n = i$, в состояние $\xi_{n+1} = j$ равна p_{ij}, причем эта вероятность не зависит ни от состояний системы в предшествующие моменты времени (свойство марковости), ни от текущего времени (свойство однородности).

Случайный процесс $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ смены состояний называется простой однородной цепью Маркова с конечным числом состояний и с дискретным временем, если для всех $n \geqslant 1$ и $i, j, i_0, i_1, \ldots \in S$ выполняется марковское свойство

$$P\{\xi_n = j | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i\} = P\{\xi_n = j | \xi_{n-1} = i\} \equiv p_{ij},$$

если только

$$P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i\} > 0.$$

Вероятности $\pi_i^{(0)} = P\{\xi_0 = i_0\}$ и вероятности $p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{iN}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, образуют стохастический вектор, т.е. вектор, удовлетворяющий двум условиям:

$$\pi_i^{(0)} \geqslant 0, \;\; \sum_i \pi_i^{(0)} = 1, \;\; p_{ij} \geqslant 0, \;\; \sum_j p_{ij} = 1, \;\; i = 1, 2, \ldots, N.$$

Неотрицательность этих величин есть свойство вероятностей, а нормированность — следствие того, что пространство допустимых состояний образует полную группу попарно несовместных событий.

$(N \times N)$-матрица $P = (p_{ij})$ называется матрицей вероятностей перехода. Она состоит из стохастических векторов-строк и называется стохастической.

Пусть имеется система с конечным числом состояний $1, 2, ..., N$, функционирование которой моделируется цепью Маркова с матрицей вероятностей перехода $P = (p_{ij})$. При переходе из состояния i в состояние j, система получает одношаговый доход r_{ij} не зависящий от номера шага. Совокупность одношаговых доходов образует $(N \times N)$-матрицу одношаговых доходов $R = (r_{ij})$. Доход, который неуправляемая система может получить за n шагов, является случайной величиной с распределением вероятностей, определяемым вероятностными связями цепи. Математическое ожидание этой случайной величины называется полным ожидаемым доходом за n шагов.

Обозначим полный ожидаемый доход системы за n шагов через $v_i(n)$. Он находится из формулы:

$$v_i\left(n\right) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}\left[r_{ij} + v_j\left(n-1\right)\right],$$

где $v_j(0)$ — продажная цена системы, если она заканчивает функционирование в состоянии j;
$q_i = \sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij} r_{ij}$ — средний одношаговый доход, получаемый системой при переходе из состояния i, $i = 1, 2, \ldots, N$, $n = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим экономическую систему с N состояниями, функционирование которой на интервале времени продолжительностью $n_{\max}$ шагов описывается цепью Маркова с доходами. Будем называть цепь Маркова управляемой, если на каждом шаге $n = 1, 2, \ldots, n_{\max}$ и в каждом состоянии $i = 1, 2, \ldots, N$ может быть выбрана строка матрицы P

$$p_i^{k_i} = \left(p_{i1}^{k_i}, p_{i2}^{k_i}, \ldots, p_{iN}^{k_i}\right)$$

и строка матрицы одношаговых доходов R

$$r_i^{k_i} = \left(r_{i1}^{k_i}, r_{i2}^{k_i}, \ldots, r_{iN}^{k_i}\right),$$

определяющих дальнейшее функционирование системы.

Величина k_i называется стратегией управления в i-м состоянии, а $K_i = \{k_i\}$ – множеством стратегий управления в i-м состоянии.

Вектор стратегий $\overline{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_N) \in K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_N$ называется политикой. Если стратегия k_i или политика $\overline{k}$ выбираются на n-м шаге, то они снабжаются индексом n, а именно k_{in} или $\overline{k}_n = (k_{1n}, k_{2n}, \ldots, k_{Nn})$. Последовательность выбранных на каждом шаге политик образуют управление $\overline{\overline{k}} = \left(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \ldots, \overline{k}_{n_{\max}}\right)$.

Необходимо найти управление $\overline{\overline{k}}^*$, максимизирующее полный ожидаемый доход:

$$V\left(n_{\max}, \overline{\overline{k}}^*\right) \to \max_{\overline{\overline{k}}},$$

где $\overline{\overline{k}} = \left(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \ldots, \overline{k}_{n_{\max}}\right)$, $\overline{k}_n = (k_{1n}, k_{2n}, \ldots, k_{Nn})$, $k_{in} \in K_i$, $n = 1, 2, \ldots, n_{\max}$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Для определения оптимального управления и соответствующего ему оптимального полного ожидаемого дохода воспользуемся методом динамического программирования Беллмана. Рассмотрим произвольный n-й шаг:

$$v_i^*(n) = \max_{k_{in}} \left[q_i^{k_{in}} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{k_{in}} v_j^*(n-1) \right] = q_i^{k_{in}^*} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{k_{in}^*} v_j^*(n-1).$$

В результате получаем k_{in}^* и $v_i^*(n)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, N$.

Этот алгоритм в данной дипломной работе был применен к задаче о замене оборудования.

Задача о замене оборудования Предположим, что имеется некоторое оборудование со случайным сроком службы. В начале каждого периода мы должны принять одно из двух решений: заменить устройство на новое или продолжать эксплуатировать старое. Вероятность поломки устройства и доход от его эксплуатации зависят от времени службы. При замене мы несем расходы на новое оборудование, при поломке мы терпим определенные убытки. Целью управления является получение возможно большей случайной прибыли (поскольку она случайна, рассматривается математическое ожидание).

Данной задаче соответствует следующая математическая модель. Под состоянием будем понимать время работы действующего оборудования. Мы будем считать, что это время описывается целым неотрицательным числом i. В каждом состоянии i возможны две стратегии: c_i – сохранить старое оборудование, и d_i – произвести замену. При стратегии d_i система переходит в состояние 0. При стратегии c_i происходит переход из i в $i+1$, если не случится поломки оборудования. Если такая поломка произойдет, то оборудование придется заменить и совершится переход из i в 0. Вероятность поломки зависит от срока службы i. Обозначим её q_i и положим $q_i = 1 - p_i$. Естественно предположить, что q_i не убывает с увеличением i. Чтобы иметь дело с конечным пространством состояний, мы допустим, что при некотором $i = N$ эта вероятность становится равной 1; тогда i будет принимать только значения $0, 1, 2, \ldots, N$.

Текущая плата на шаге n зависит от времени службы прибора, от нашего решения и от того, произойдет ли поломка на этом шаге. Пусть h_i – доход при переходе из i в $i+1$ при стратегии c_i (то есть при благополучной эксплуатации оборудования, уже прослужившего время i); по смыслу задачи h_i не возрастает с увеличением i. Обозначим через α доход за период, когда происходит замена оборудования (переход из i в 0 при стратегии d_i). Будем считать α не зависит от i и при любом i верно неравенство $\alpha < h_i$. Наконец, пусть γ – доход при поломке оборудования (из i в 0 при стратегии c_i). Поскольку замена оборудования при поломке обходится дороже планомерной замены, то справедливо неравенство $\gamma < \alpha$. Тогда доход при использовании d_i равен α, а математическое ожидание дохода при использовании стратегии c_i равно $p_i h_i + q_i \gamma$. Продажную цену системы, заканчивающую функционирование в состоянии i – r_i можно положить равной нулю или любой невозрастающей функции от i (тогда её можно истолковать как оценку стоимости оборудования в начале промежутка стратегии).

Справедливы следующие неравенства:

$$
\begin{gathered}
h_0 \geqslant h_1 \geqslant \ldots \geqslant h_i \geqslant \ldots \geqslant h_N > \alpha > \gamma, \\
q_0 \leqslant q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_i \leqslant \ldots \leqslant q_N = 1, \\
p_0 \geqslant p_1 \geqslant \ldots \geqslant p_i \geqslant \ldots \geqslant p_N = 0, \\
r_0 \geqslant r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_i \geqslant \ldots \geqslant r_N.
\end{gathered}
$$

Управляемая марковская цепь, соответствующая данной моделе: $\forall n = 0, \ldots, n_{\max} \quad S_n = \{0, 1, \ldots, i, \ldots, N\} = S$ – множество состояний системы. Обозначим стратегию $k_1 = c_i$, а $k_2 = d_i$, тогда множество стратегий будет иметь вид $K_i = \{c_i, d_i\}$.

Матрицы вероятностей перехода из состояния i в состояние j для стратегий c и d имеют вид:

$$
P_c = \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & \ldots & 0 \\ q_1 & 0 & p_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \quad P_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.
$$

Матрицы одношагового дохода:

$$
R_c = \begin{pmatrix} \gamma & h_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \gamma & 0 & h_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma & 0 & 0 & \ldots & h_N \end{pmatrix} \quad R_d = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.
$$

Тогда для нашей задачи получим:

$$
v_i(n) = \max_{k_i} \left[q_i^{k_i} + \sum_{j=0}^{N} p_{ij}^{k_i} v_j(n-1) \right] = \max \left[u_n(c_i), u_n(d_i) \right],
$$

$$
u_n(c_i) = p_i h_i + q_i v_0(n-1) + p_i v_{i+1}(n-1),
$$

$$
u_n(d_i) = \alpha + v_0(n-1),
$$

причем

$$
v_i(0) = r_i = 0 \quad (0 \leqslant i \leqslant N).
$$

Политика равна $\overline{k} = (k_{1n}, k_{2n}, \ldots, k_{Nn})$, где $\forall\ \ i = 1, 2, \ldots, N$

$$k_{in} = \begin{cases} c, & u_n\left(c_i\right) \geqslant u_n\left(d_i\right) \\ d, & u_n\left(c_i\right) < u_n\left(d_i\right) \end{cases}.$$

Для решения задач о замене оборудования была написана программа на языке C++ в Visual Studio 2013, вычисляющая доход системы и стратегию на каждом шаге в каждом состоянии.

Заключение

В данной работе рассмотрена одна из важных экономических проблем, заключающаяся в определении оптимальных стратегий замены оборудования. В результате старения оборудования растут производственные затраты по выпуску продукции на старом оборудовании, увеличиваются затраты на его ремонт и обслуживание, снижаются производительность и ликвидная стоимость. Наступает время, когда старое оборудование выгоднее продать, заменить новым, чем эксплуатировать ценой больших затрат.

В ходе работы был разработан и реализован алгоритм, позволяющий вычислить в какое же время выгоднее оставить старое оборудование, а в какое заменить его на новое. Данный алгорит основан на методе динамического программирования Беллмана. Он позволяет на каждом временном этапе(шаге) и в каждом состоянии вычислять оптимальную стратегию и доход системы. Зная эти данные, любой владелец оборудования сможет получить наибольшую прибыль от работы своего оборудования.