Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Минимальные реберно-двусвязные конгруэнции графов

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 632 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Киреева Романа Андреевича

Научный руководитель

старший преподаватель ____________ М.Р. Мирзаянов

18.01.2018 г.

Заведующий кафедрой

профессор, к.ф.-м.н. ____________ В.Н. Салий

18.01.2018 г.

Саратов 2018

ВВЕДЕНИЕ

Ориентированный граф (орграф) – это пара $G = (V, \alpha)$, где V – конечное непустое множество (вершины графа), а α – бинарное отношение на множестве V (отношение смежности вершин). Пары, входящие в α, называются дугами графа G. Если отношение α антирефлексивно и симметрично, граф называют неориентированным, а каждую пару его встречных дуг (u, v), (v, u) – ребром.

Основные понятия приводятся в соответствии с [1], [2].

Теория графов находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности. С помощью графовых моделей могут быть представлены транспортные системы, алгоритмы, компьютерные и информационные сети, автоматы, отношения в социальных группах и многое другое.

Одним из важных направлений в теории графов является проблема оптимальной реконструкции графа [3]. В качестве допустимых реконструкций обычно рассматриваются следующие:

1) ориентация ребер данного неориентированного графа (например, известная теорема Оре – критерий ориентируемости графа в сильно связный подграф [4]);

2) добавление новых дуг (ребер) (эта реконструкция используется, например, для построения отказоустойчивых реализаций по Хейзу-Абросимову [5]);

3) удаление некоторых дуг (ребер) (здесь общеизвестными результатами являются, например, алгоритмы построения минимального остовного дерева для связной сети, минимальные расконтуривания сетей в технической диагностике);

4) конгруэнции графов – отождествление некоторых вершин графов.

Пусть $G = (V, \alpha)$ – граф и $\varepsilon \subseteq V \times V$ – отношение эквивалентности на множестве его вершин. Факторграфом графа G по эквивалентности ε называется граф $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha/\varepsilon)$, где $\alpha/\varepsilon = \{(\varepsilon(u), \varepsilon(v)) \in V/\varepsilon \times V/\varepsilon \mid (\exists u' \in \varepsilon(u), v' \in \varepsilon(v))((u', v') \in \alpha)\}$.

Если K – некоторый класс графов, и $G \notin K$, то под K-конгруэнцией графа G понимается такая эквивалентность $\theta \subseteq V \times V$, что $G/\theta \in K$.

С точки зрения оптимальных реконструкций графа интерес вопрос, как устроены минимальные по включению K-конгруэнции заданного графа [3]. Решение этого вопроса для произвольного класса K не известно, однако существуют решения для некоторых конкретных классов

Будем называть порядком $r(\varepsilon)$ отношения эквивалентности $\varepsilon \subseteq V \times V$ число классов, на которые оно разбивает V.

K-конгруэнция θ графа G минимальна, если она имеет максимальный порядок среди всех K-конгруэнций G.

Интересен вопрос, как устроены минимальные K-конгруэнции данного графа.

Например, для класса K функциональных графов М. А. Кабанов указал наименьшую K-конгруэнцию на произвольном графе и установил некоторые свойства решетки функциональных конгруэнций графа [6]. Он же решил аналогичные задачи для классов входящих и выходящих ориентированных деревьев, описал графы со специальными решетками циклических и ациклических конгруэнций.

М. Р. Мирзаянов рассматривал случай, когда K – класс сильно связных орграфов, и нашел способ построения сильно связной конгруэнции произвольного орграфа, наибольшей по числу вершин в факторграфе [7], [8].

Е. О. Карманова показала, что любой связный граф является факторграфом подходящей цепи, а также нашла границы для минимальной длины цепи, факторизующейся на данный граф [9], [10], [11].

О. Е. Смирнов изучал цепные конгруэнции графов, нашел алгоритм построения максимальной факторцепи и минимальной цепной конгруэнции произвольного двудольного графа и установил некоторые свойства решетки цепных конгруэнций графа [12].

Граф называется реберно-двусвязным, если между любой парой различных вершин существуют два реберно непересекающихся пути.

Рассмотрим случай, когда K – класс графов, являющихся реберно-двусвязными графами. В этом случае K-конгруэнции графа называются реберно-двусвязными конгруэнциями.

Целью данной работы является изучение минимальных реберно-двусвязных конгруэнций графов, поиск алгоритма их построения, а также написание программы, реализующей этот алгоритм.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В первом разделе описаны критерии существования, реберно-двусвязной конгруэнции графа.

Очевидно, что наличие изолированных вершин не влияют ни на порядок минимальной реберно-двусвязной конгруэнции ни на ее наличие. Так же очевидно, что порядок минимальной реберно-двусвязной конгруэнции вполне несвязного графа равен 1. Если граф не является вполне несвязным, то всегда можно избавиться от изолированных вершин, отождествив их с не изолированными.

Лемма 1. Если $G=(V,\alpha)$ – звезда и $\varepsilon\subseteq V\times V$ – произвольное отношение эквивалентности на множестве вершин, такое, что факторграф G/ε является неориентированным графом то G/ε – тоже звезда.

Следствие 1. Если граф G – звезда, то у него не существует ребрено-двусвязных конгруэнций.

Лемма 2. Если $G=(V,\alpha)$– неориентированный граф, в котором есть цикл. То существует реберно-двусвязная конгруэнция θ графа G.

Лемма 3. Пусть $G=(V,\alpha)$ – неориентированный, ациклический граф. Если среди подграфов графа G есть один из графов, изображенных на рисунках 1–3, то существует реберно-двусвязная конгруэнция θ графа G.

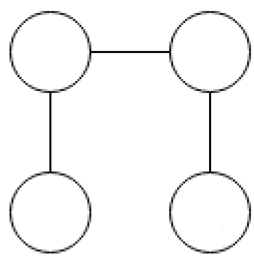

Рисунок 1 – Случай 1 для леммы 3.

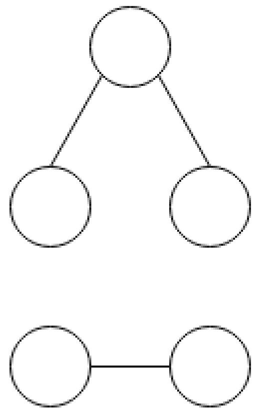

Рисунок 2 – Случай 2 для леммы 3.

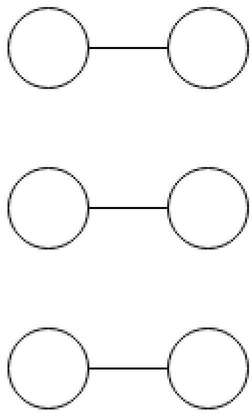

Рисунок 3 – Случай 3 для леммы 3.

Теорема 1. Для неориентированного графа $G = (V, \alpha)$ существует реберно-двусвязная конгруэнция тогда и только тогда, когда в G есть цикл, либо среди подграфов G есть один из графов, изображенных на рисунках 1-3.

В разделе 2 описаны факторы, ограничивающие порядок реберно-двусвязной конгруэнции графа.

Пусть $G = (V, \alpha)$ – неориентированный граф. Обозначим $K_v = \{u \in V \mid (v, u) \in \alpha \wedge d(u) = 1\}$.

Множество $K_v, v \in V$, что $\forall u \in V$ выполняется $|K_v| \geq |K_u|$ будем называть висячим множеством графа G и обозначать K_G, а вершину v будем называть основанием висячего множества. Если в графе несколько таких вершин, то выберем любую из них.

Обозначим H − количество висячих компонент реберной двусвязности.

Лемма 4. Если $G=(V,\alpha)$ – граф и $\theta \subseteq V \times V$ – реберно-двусвязная конгруэнция графа G. Тогда для любой висячей компоненты реберной двусвязности $A \subseteq V$ выполнятся:

$$\left|\bigcup_{v \in A} \theta(v)\right| > |A|$$

Следствие 3. Если $G=(V,\alpha)$ – неориентированный граф и $\theta \subseteq V \times V$ – реберно-двусвязная конгруэнция графа G, то порядок $r(\theta) \le |V| - \lceil \frac{H}{2} \rceil$.

Лемма 5. Если $G=(V,\alpha)$ – неориентированный граф и $\theta \subseteq V \times V$ – реберно-двусвязная конгруэнция графа G, то порядок $r(\theta) \le |V| - |K_G|$.

Теорема 2. Пусть $G=(V,\alpha)$ – дерево, для которого существует реберно-двусвязная конгруэнция. Тогда существует реберно-двусвязная конгруэнция θ графа G, порядок которой $r(\theta) = min(|V| - \lceil \frac{H}{2} \rceil,\ |V| - |K_G|)$.

Теорема 3. Пусть $G=(V,\alpha)$ – лес, для которого существует реберно-двусвязная конгруэнция. Тогда существует реберно-двусвязная конгруэнция θ графа G, порядок которой $r(\theta) = min(|V| - \lceil \frac{H}{2} \rceil,\ |V| - |K_G|)$.

Теорема 4. Пусть $G=(V,\alpha)$ – связный граф, для которого существует реберно-двусвязная конгруэнция. Тогда существует реберно-двусвязная конгруэнция θ графа G, порядок которой $r(\theta) = min(|V| - \lceil \frac{H}{2} \rceil,\ |V| - |K_G|)$.

Обозначим B – количество изолированных компонент реберной двусвязности. $P = 1$, если в G нет мостов и 0 иначе.

Лемма 6. Если $G=(V,\alpha)$ – неориентированный граф и $\theta \subseteq V \times V$ – реберно-двусвязная конгруэнция графа G, то порядок $r(\theta) \le |V| - \lceil \frac{H}{2} \rceil - B + P$.

Теорема 5. Пусть $G=(V,\alpha)$ – неориентированный граф, для которого существует реберно-двусвязная конгруэнция. Тогда существует реберно-двусвязная конгруэнция θ графа G, порядок которой $r(\theta) = min(|V| - \lceil \frac{H}{2} \rceil - B + P,\ |V| - |K_G|)$.

В разделе 3 описан алгоритм построения минимальной реберно-двусвязной конгруэнции произвольного графа. Алгоритм реализован на языке программирования C++.

Программа была протестирована на большом количестве случайных графов и классах графов специального вида. Полный перебор гарантированно находит правильный ответ, однако, так как переборное решение работает очень медленно, к примеру 15 число Белла 1382958545, то полное тестирование программы возможно только на графах с маленьким числом вершин. Поэтому основную часть тестирования составляет проверка совпадения результатов, полученных в теории и на практике.

В разделе 4 описание программы и приведен пример работы программы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проделанной работы были найдены критерии существования реберно-двусвязной конгруэнции графа, выявлены факторы, ограничивающие порядок реберно-двусвязной конгруэнции и реализован алгоритм нахождения одной из минимальных реберно-двусвязных конгруэнций графа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Богомолов А.М, Алгебраические основы теории дискретных систем: монография / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. М.: Наука; Физматлит, 1997. 368 с.

2 Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. М.: Мир, 1973. 300 с.

3 Салий, В. Н. Оптимальные реконструкции графов // В кн.: Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2008. С. 59-65.

4 Теория графов = Theory Of Graphs = THEORY OF GRAPHS: перевод с английского / О. Оре; под ред. Н. Н. Воробьева. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы [Физматлит], 1968. 352 с.

5 Абросимов М. Б. Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов / М. Б. Абросимов // Известия Саратовского университета. Серия. Математика. Механика. Информатика. Саратов: СГУ, 2006. Т. 6. Вып. 1/2. С. 86-91

6 Кабанов М.А. Функциональные конгруэнции ориентированных графов // Упорядоч. множества и решетки. Саратов, 1995. Вып. 11. С. 15–23.

7 Мирзаянов М. Р. Сильно связные конгруэнции ориентированных графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Вып. 7. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. С. 104–114

8 Мирзаянов М. Р. О минимальных сильно связных конгруэнциях ориенированных цепей // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6. Вып. 1/2. С. 91–95.

9 Карманова Е. О. О конгруэнциях цепей // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2(12). С. 96–100.

10 Карманова, Е.О. Упорядоченное множество конгруэнций цепи / Е.О. Карманова // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы междунар. науч. конф. – Саратов: Издат. центр "Наука", 2012. – С. 133-135.

11 Карманова, Е.О. Конгруэнции цепей: некоторые комбинаторные свойства / Е.О. Карманова // Прикладная дискретная математика. Приложение: Тезисы докладов Всероссийской конференции "XI Сибирская научная школа-семинар с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография» – SYBECRYPT'12" (Иркутск, 3–8 сентября 2012 г.). – № 5, сентябрь 2012. – С. 93–94.

12 Смирнов О. Е. Минимальные цепные конгруэнции графов / О. Е. Смирнов // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы междунар. науч. конф. – Саратов: Издат. центр «Наука», 2016. – С. 384-386.