

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического и компьютерного моделирования

**АВТОРЕФЕРАТ**

магистерской работы

**«Прогнозирование условной волатильности**

**с использованием GARCH моделей»**

студентки 3 курса 392 группы

направления 38.04.01 «Экономика»

механико-математического факультета

Лунгу Валерии Сергеевны

Научный руководитель:

профессор., д.э.н., профессор \_\_\_\_\_

Л.В. Кальянов

Зав. кафедрой:

зав.каф, д. ф-м н \_\_\_\_\_

Ю. А. Блинков

**Саратов 2017**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Действительность показывает, что зачастую прогнозы выдают результаты, значительно отличающиеся от надвигающейся реальности, как в худшую, так и в лучшую для кого-то сторону. Например, в 2008 году накануне возникновения мирового финансового кризиса ведущие агентства и аналитики не предсказывали столь масштабной катастрофы на финансовом рынке. Наоборот, их прогнозы были вполне оптимистичными. Также существует и немало других примеров ситуаций, когда все шло не так, как прогнозировалось. По мнению Макридакиса, проблема всех этих прогнозов заключалась в том, что они неправильно формулировались. Ведь при составлении того или иного сценария развития событий необходимо также указывать условия, при которых данный сценарий сможет воплотиться в жизнь.

Задачи оценивания и прогнозирования волатильности представляют значительный интерес в различных приложениях экономики и финансов. А также в связи с нестабильной ситуацией на мировых рынках, мною было принято решение, исследовать модели определения волатильности. В частности, будут рассмотрены такие модели как GARCH. Особый интерес представляет использование нейронных сетей в приложении к исследованию временных рядов. Стоит отметить, что главным преимуществом нейронных сетей является их способность аппроксимировать практически любые нелинейные зависимости, применяя одну и ту же методологию.

Целью магистерской работы было показать, как могут использоваться показатели волатильности доходности финансовых активов для измерения риска и своевременной идентификации кризисов на финансовых рынках.

Сравнение прогнозных способностей линейных и нелинейных моделей условной волатильности проводится на примере GARCH моделей для доходности индекса РТС. По данным дневных цен закрытия индекса РТС за 10 лет оценивается ряд параметрических моделей, строится набор прогнозов волатильности для горизонтов различной длины, по которым прогнозные способности моделей сравниваются согласно выбранным критериям.

Первая часть работы затрагивает понятие волатильности и методы ее прогнозирования.

Так, волатильность, изменчивость (англ. volatility) — статистический финансовый показатель, характеризующий изменчивость цены. В математической экономике статистическая величина, характеризующая изменчивость различных показателей (цены, доходности и т.д.) во времени. Является важнейшим финансовым показателем и понятием в управлении финансовыми рисками, где представляет собой меру риска использования финансового инструмента за заданный промежуток времени. Для расчета волатильности обычно применяется выборочное стандартное отклонение, что позволяет инвесторам с некоторой точностью определить риск приобретения финансового инструмента. Тем не менее, выборочные статистики, такие как выборочное стандартное отклонение, обладают рядом недостатков, из-за которых их использование может давать неверные результаты. Как минимум, оценка волатильности, полученная при помощи выборочного стандартного отклонения, является состоятельной (сходится по вероятности к истинному значению) лишь в асимптотике (т.е. при бесконечно большом объеме выборки), а также не позволяет своевременно идентифицировать изменение волатильности во времени. Одним из наиболее известных примеров использования волатильности в финансово-математических моделях является уравнение Блэка-Шоулза (Black-Scholes). Хотя уравнение Блэка-Шоулза подразумевает постоянную волатильность, ее постоянство не наблюдается при анализе реальных рынков. Известно, что различные виды активов имеют периоды высокой и низкой волатильности. То есть в некоторые периоды цены

могут меняться достаточно быстро, тогда как в другое время они могут практически не изменяться. Как правило, высокая волатильность не появляется «из ниоткуда», ей предшествуют более крупные изменения, чем обычно (чаще всего отрицательные). Это называется условной авторегрессионной гетероскедастичностью.

Различают три типа волатильности:

- Историческая волатильность (англ. historical volatility) — это величина, равная стандартному отклонению доходности финансового инструмента за заданный промежуток времени, рассчитанному на основе исторических данных о его стоимости.
- Ожидаемая волатильность (англ. implied volatility) — волатильность, вычисленная на основе текущей стоимости финансового инструмента в предположении, что рыночная стоимость финансового инструмента отражает ожидаемые риски.
- Историческая ожидаемая волатильность (англ. historical implied volatility) — «летопись» прогнозов ожидаемой волатильности.

Модель GARCH(p, q) можно представить в виде ARMA-процесса, учитывая, что  $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + v_t$ , где  $\mathbb{E}_{t-1}[v_t] = 0$ ,  $v_t \in [-\sigma_t^2, \infty)$ :

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{\max(p,q)} (\alpha_j + \beta_j) \varepsilon_{t-j}^2 + \left( v_t - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i} \right). \quad (1.1)$$

В частности для GARCH(1, 1) – модели при  $k > 2$  имеем

$$\mathbb{E}_t[\sigma_{t+k}^2] = \sum_{i=0}^{k-2} (\alpha_1 + \beta_1)^i \omega + (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \sigma_{t+1}^2 \quad (1.2)$$

Когда процесс является ковариационно стационарным, то  $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+k}^2]$  сходится к  $\sigma^2$  при  $k \rightarrow \infty$ .  $P(t) = \sum_i n_i p_i(t)$ , где  $p_i(t)$

**Во второй части** рассматривается мера риска VaR.

Мера риска Value-at-Risk (VaR) на данный момент является стандартом в измерении рыночных рисков, и для ее вычисления разработано множество моделей и методов их реализации. Приведена классификация моделей, используемых для вычисления VaR. Из всех видов рисков, с которыми сталкиваются финансовые организации, рыночный риск (market risk), возникающий из-за изменения рыночных цен, наиболее легко может быть измерен с использованием методологии Value-at-Risk (VaR). Для других видов рисков (кредитного, операционного) методология VaR также может использоваться, но ее применимость ограничена. В работе использовать следующие обозначения:  $P(t)$  – текущая стоимость портфеля (mark-to-market value), состоящего из различных финансовых инструментов.

Было дано определение меры риска VaR. Для заданного в работе уровня достоверности  $\alpha \in (0; 1)$  и временного горизонта мера риска VaR определяется как

$$VaR_{\alpha} := \inf \{ u \mid \mathbf{P}[\Delta P(\Delta x, \Delta t) \leq u] > \alpha \}, \quad (1.4)$$

**В третьей части** детально рассмотрена модель GARCH.

Модели, используемые для прогнозирования ситуации на финансовых рынках в условиях нестабильности (волатильности). Когда ситуация на финансовых рынках нестабильна и характеризуется высокой изменчивостью значений различных показателей (курсов валют, акций, биржевых индексов, ставок по кредитам и т.д.), имеет место изменчивость дисперсии на различных интервалах наблюдения, т.е. гетероскедастичность.

В таких условиях обычные линейные регрессионные модели оказываются слишком грубыми. Одним из возможных решений данной проблемы является введение в рассмотрение некоторой случайной величины, от которой зависит дисперсия.

Так для лаконичного моделирования условной гетероскедастичности Bollerslev (1986) и независимо от него Taylor (1986) предложили обобщенную ARCH-модель – GARCH( $p, q$ ).

Данная модель сочетает авторегрессию и скользящее среднее, только более высоких порядков.

ARCH-модель – GARCH( $p, q$ ):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L) \varepsilon_t^2 + \beta(L) \sigma_t^2, \quad (1.5)$$

Модель GARCH(1, 1) наиболее популярна в прикладных исследованиях:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \quad (1.6)$$

**Четвертая часть** работы посвящена критериям сравнения и эффективности выбранных моделей.

Для сравнения прогнозных способностей моделей существует большое количество статистических критериев. Наиболее распространенными являются:

1. среднеквадратичная ошибка прогноза для дисперсии (Mean Squared Predicted Errors) – MSPE1;
2. среднеквадратичная ошибка прогноза для волатильности – MSPE2;
3. логарифмический аналог MSPE1 – R2LOG;
4. более нелинейный критерий – QLIKE, аналогичный гауссовой функции потерь;
5. процентная квадратичная ошибка – PSE;
6. среднее абсолютное отклонение дисперсии – MAD1;
7. среднее абсолютное отклонение волатильности – MAD2.

Эти критерии используются и в работе.

После проведенных тестов был сделан вывод, что GARCH(1,1) модель показывает неплохую прогнозную способность, нелинейные модели показывают лучшие результаты. В частности, по большинству критериев сравнения модель переключения волатильности VS-GARCH демонстрирует наилучшую прогнозную способность среди всех рассматриваемых в работе моделей. Возможное объяснение успешности прогнозирования нелинейными моделями GJR-GARCH(1,1) и VS-GARCH(1,1) заключается в том, что горизонт прогнозирования невелик (максимальный горизонт прогноза – 20 рабочих дней, или 1 месяц), а при больших горизонтах линейные модели будут давать меньшую ошибку прогноза, чем более сложные нелинейные спецификации. Однако прогнозирование на таких больших горизонтах – открытый вопрос и требует отдельного рассмотрения. Кроме этого, линейные модели имеют тенденцию к снижению прогнозных значений при увеличении горизонта, в то время как прогнозные значения, полученные с помощью нелинейных моделей, растут с увеличением горизонта прогнозирования. Основным преимуществом нелинейных моделей является тот факт, что они позволяют улавливать стилизованные факты, демонстрируемые временными рядами, такие как асимметричное влияние шоков разных знаков, тяжелые хвосты распределений и отрицательную корреляцию волатильности и случайных шоков доходности, что имеет большое значение при анализе рынков и построении прогнозов.

**Заключительная** часть работы затрагивает сравнение моделей семейства ARCH/GARCH.

Поскольку для всех модификаций параметры модели оцениваются методом максимального правдоподобия. То основной целью было выбрать, какую GARCH модель следует использовать. Все исследования проводились с применением программного пакета Gretl и R Studio.

Так, входными данными в работе послужили значения логарифмической дневной доходности индекса ММВБ 10 (МСХ 10) за период с 04.01.2016 по 19.05.2017.

В первую очередь, для выявления тяжелых хвостов была построена гистограмма ряда логарифмических доходностей (рисунок 1).

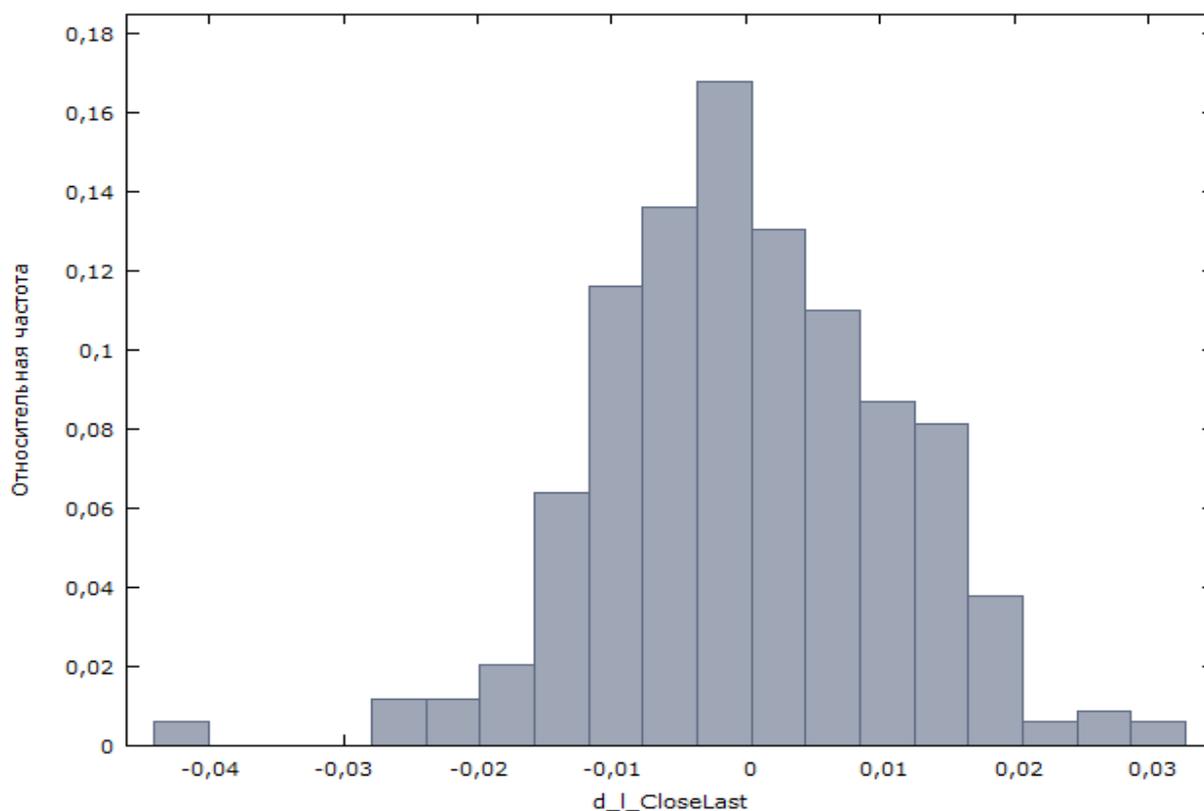


Рисунок 1 - Гистограмма ряда логарифмических доходностей индекса ММВБ

Построенные в последствии графики квантилей показали, что доходность индекса имеет нормальное распределение. Волатильность в выбранном случае имеет пучкообразную форму, а разброс значений логарифмической доходности равномерен.

Проведя статистические тесты были получены параметры моделей (таблица 1).

Таблица 1 – Параметры моделей

Модель	Параметр	Значение	Стандартная ошибка
GARCH (1, 1)	$\omega$	0.000005	0.000001
	$\alpha$	0.056800	0.010083
	$\beta$	0.892550	0.019430
	AIC	-6.2530	
	Shibata	-6.2532	
	HQ	-6.2352	
EGARCH (1, 1)	$\omega$	-0.506894	0.028042
	$\alpha$	-0.053637	0.030268
	$\beta$	0.944701	0.003167
	$\gamma$	0.091444	0.031334
	AIC	-6.2449	
	Shibata	-6.2453	
IGARCH (1, 1)	$\omega$	0.000001	0.000001
	$\alpha$	0.061452	0.018043
	$\beta$	0.938548	0.000551
	AIC	-6.2437	
	Shibata	-6.2438	
	HQ	-6.2304	
TGARCH (1, 1)	$\omega$	0.001370	0.001065
	$\alpha$	0.079191	0.041756
	$\beta$	0.807006	0.119212
	$\gamma$	0.477413	0.390532
	AIC	-6.2213	
	Shibata	-6.2217	
APARCH (1, 1)	HQ	-6.1991	
	$\omega$	0.000000	0.000000
	$\alpha$	0.027807	0.021812
	$\beta$	0.886988	0.034109
	$\gamma$	0.224408	0.201506
	AIC	-6.2640	
	Shibata	-6.2646	
HQ	-6.2374		

Анализ полученных данных показал, что наилучшие значения информационных критериев Акаике, Шибаты и Ханна-Куин демонстрирует модель APARCH (1,1). По всем моделям коэффициент  $\beta$  прошлой условной вариации близок к единице. Это расценивается как устойчивость вариации в периоде, идущем перед моментом  $t$ . Близость значения коэффициента к единице говорит о существовании устойчивой тенденции в вариации. Оценка моделей

TARCH и APARCH подтверждает присутствие асимметричного эффекта для индекса ММВБ 10, это подтверждается тем, что параметр  $\gamma$  для всех моделей отличен от нуля. То есть негативные новости будут оказывать более сильное воздействие на волатильность, нежели положительные.

Составленный далее прогноз с использованием APARCH модели на 7 и 30 дней показал, что опираясь на данные прогнозирования за 7, 14 и 21 день, наиболее применимой моделью будет APARCH (1,1).

Для сравнения качества оценок моделей в работе использовались котировки российских акций, обращающихся на ММВБ. Поскольку оценка реализованной волатильности требует наличия котировок с высокой частотой, в анализе будут использованы «голубые фишки», торги по которым проводятся ежесекундно.

Оценка реализованной волатильности и VaR проводилась на основе двух лет каждого периода с ежедневной переоценкой и плавающим окном два года. Предсказание значения VaR на 10.01.2006 проводится на основе данных за 09.01.2004–09.01.2006, в то время как для предсказания VaR на 11.01.2006 используются два года, сдвинутые на один день по сравнению с предыдущим оценочным периодом, т. е. 10.01.2004–10.01.2006. В результате в каждом периоде насчитывалось около 500 значений в зависимости от числа торговых дней в году. Средние арифметические рядов в разбивке по временным периодам представлены в таблице 2. В таблице пропущены значения для акций «Газпром» на двух интервалах I периода, т. к. торги на ММВБ по этим бумагам начались с 23.01.2006.

Таблица 2 – Средние арифметические рядов

	I период (01.01.2004–01.01.2008)		II период (01.01.2006–01.01.2010)		III период (01.01.2008–01.01.2012)				
	2004–2006	2006–2008	2004–2008	2006–2008	2008–2010	2006–2010	2008–2010	2010–2012	2008–2012
GAZP	—	0.86	—	0.86	-1.47	-0.24	-1.47	-0.26	-0.81
LKOH	1.89	0.24	1.01	0.24	-0.48	-0.10	-0.48	-0.06	-0.25
GMKN	0.33	2.16	1.27	2.16	-0.90	0.65	-0.90	0.1	-0.38
MSNG	1.74	0.93	1.36	0.93	-1.62	-0.34	-1.62	-1.76	-1.69
RTKM	0.015	2.93	1.49	2.93	-1.46	0.78	-1.46	0.09	-0.68
SBER	3.52	1.95	2.61	1.95	-0.51	0.69	-0.51	-0.18	-0.32

В первом, предкризисном, периоде не выявлен наилучший метод расчета волатильности, но очевидно, что логарифмическая модификация HAR-RV позволяет получать наиболее точные оценки VaR. Волатильность во втором периоде, который охарактеризовался значительным ростом и последующим резким падением рынка, также была смоделирована с высокой точностью. В третьем периоде наблюдается смещение результатов от взвешенных методов к методам со скользящими средними — EWMA и HWMA, при этом последний имеет небольшое преимущество перед классическим EWMA расчетом. Для данного периода лучше использовать модель предсказания с квадратным корнем, т. к. для пяти компаний из шести по ней получены наилучшие результаты.

В ходе изучения сделан вывод, что точность моделей реализованной волатильности с точки зрения оценок VaR не уступает своим конкурентам — моделям GARCH волатильности. При этом сложность расчетов кардинально различается для двух типов моделей. Если для GARCH и APARCH моделей требуется применение оптимизационных методов, с которыми справляются только математические программные продукты, то для метода реализованной волатильности главным является наличие внутридневных котировок, а расчет может быть проведен в любой удобной пользователю программной среде.

## СПИСОК НЕКОТОРЫХ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В РАБОТЕ

### ИСТОЧНИКОВ

1. Бруссер П.А. Волатильность и информационная эффективность фондового рынка // Вестник СПбГУ. 2004.
2. Корников В.В., Серёгин И.А., Хованов Н.В. Многокритериальное оценивание финансовых рисков в условиях неопределённости
3. Andersen, T.G. & T. Bollerslev (1998). ARCH and GARCH models. Глава в Encyclopedia of Statistical Sciences, (под редакцией S. Kotz, C. Read & D. Banks), том 2. John Wiley and Sons.
4. Кулаков А.Е. Волатильность доходности как интегральный показатель риска
5. Peter R. Hansen and Asger Lunde. A comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1)?, (March 22, 2004), Brown Univ. Economics Working Paper No.
6. Andersen, T.G. (1996). Return volatility and trading volume: an information flow interpretation of stochastic volatility. Journal of Finance 51, 169–204.
7. Четыркин Е.М. Финансовые риски. – М.: Дело, 2008
8. Ананьев М.А., Митин Н.А. Сравнение линейных и нелинейных авторегрессионных моделей условной гетероскедастичности.
9. Стахович Л.В. Формирование финансовой грамотности населения в сфере финансовых рынков: анализ международного опыта
10. Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, Journal of Econometrics.
11. Щерба А. В. (2012). Моделирование оценки рыночного риска рынков европейских стран в период финансового кризиса 2008 года. Прикладная эконометрика, 27 (3), 20–35.