Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 3 курса 322 группы
направления 44.04.01 Педагогическое образование
Чернякова Сергея Игоревича

Научный руководитель
ст. преп. ________________ М.А. Осипцев

Зав. кафедрой
д.ф-м.н, профессор ________________ Д.В. Прохоров

Саратов, 2017

ВВЕДЕНИЕ

«Основы математического анализа» – единственный раздел в школьной математике, не относящийся к элементарной математике. Основным объектом изучения здесь является числовая функция. Несмотря на краткость, школьный курс «Основ математического анализа» дает возможность выпускнику средней школы не только получить представление о математическом анализе как о мощном прикладном аппарате современной математики, но и научиться сознательно им пользоваться при решении целого ряда задач, не поддающихся элементарным методам.

Актуальность темы. На экзаменах часто встречаются задачи, для решения которых удобно пользоваться понятиями математического анализа, начиная с простейших, таких как область определения и область значений функции, участки монотонности, четность и периодичность, и вплоть до понятия производной функции, касательной к графику функции, а также может пригодиться умение находить точки максимума и минимума или наибольшие и наименьшие значения различных функций. Приведенные выше аргументы говорят об актуальности рассматриваемой темы. Так же следует заметить, что в едином государственном экзамене (ЕГЭ) присутствуют, как минимум, три задачи требующие знаний основ математического анализа.

Целью магистерской работы является адаптация основных понятий математического анализа для преподавания в средней школе, разработка электронного курса по теме «Задачи на экстремум», включающего в себя теоретический материал и тестовые задания различного уровня сложности.

Практическая значимость работы заключается в развитии тестовой методики для проверки уровня усвоения школьниками теоретического материала и умения пользоваться полученными знаниями для решения задач по данной теме.

Структура и содержание магистерской работы. Работа состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка использованных источников. Первый и второй разделы посвящены теоретическому материалу. В первом разделе вводится понятие функции, предела функции, непрерывности функции в точке и на интервале. Во втором разделе даются понятия производной функции, точек локального экстремума, наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. Приводятся базовые определения, а также необходимые теоремы для решения экстремальных задач. Третий раздел магистерской работы содержит тестовые задания для проверки усвоения теоретического материала. Предлагается несколько вариантов тестов различных уровней сложности, которые содержат задания от самых простых до сложных модельных задач. В четвертом разделе описана апробация разработанных тестов. В пятом разделе даны ответы к тестам и решение некоторых задач. Список использованных источников содержит 22 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В **первом** разделе вводятся понятия функции, ее графика, предела функции, непрерывности функции в точке и на интервале, приведены примеры.

Во **втором** разделе вводится понятие производной функции, которая равна пределу

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{'}(x_0) \tag{1}$$

и придается ему форма, пригодная для широких обращений. Если обозначить

$$f^{'}(x_0) = A, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A = \alpha(x), \tag{2}$$

то функция α определена в окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0. Формула (1) эквивалентна

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Другими словами, функция α бесконечно мала при $x \to x_0$. Выражая $f(x)$ из (2), найдем

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0). \tag{3}$$

Поскольку все проделанные преобразования обратимы, то формулы (1) и (2) равносильны. Таким образом, можно дать определение дифференцируемой функции и ее производной в форме, равносильной данному в программе средней школы.

Определение 2.1. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если существует число A и бесконечно малая при $x \to x_0$ функция α такие, что справедлива формула (3).

В этом случае число A называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f^{'}(x_0)$. Произведение $A(x - x_0)$ называется дифференциалом функции f в точке x_0, соответствующим приращению $x - x_0$, и обозначается $df(x_0)$.

В данном разделе приводятся механическое, геометрическое истолкование производной и аналитическое обоснование дифференцируемости. Свойства дифференцируемых функций сформулированы в виде теорем. Приведем их без доказательства.

Теорема 2.1 (Непрерывность дифференцируемой функции). Если функция f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение теоремы 2.1 неверно.

Показано, что свойство дифференцируемости инвариантно относительно арифметических действий над функциями и выведем формулы дифференцирования, известные из программы средней школы.

Теорема 2.2 (Арифметические действия над дифференцируемыми функциями). Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0. Тогда функции $f + g$, $f - g$,$f\ g$ и $\dfrac{f}{g}$ дифференцируемы в точке x_0 и справедливы формулы

$$(f + g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) + g^{'}(x_0);$$

$$(f - g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) - g^{'}(x_0);$$

$$(f\ g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g^{'}(x_0);$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}(x_0) = \frac{f^{'}(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g^{'}(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0.$$

Теорема 2.3 (Дифференцируемость сложной функции). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке y_0, $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $z = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и справедлива формула

$$(g(f))'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0). \tag{4}$$

Теорема 2.4 (Производная обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, $f'(x_0) \neq 0$, и имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y)$. Тогда обратная функция дифференцируема в точке y_0, $y_0 = f(x_0)$, и справедлива формула

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{5}$$

На все рассмотренные свойства приведены примеры.

Вводится понятие производной второго порядка (или второй производной) некоторой функции $f(x)$ как:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'.$$

Производной от производной второго порядка, если она существует, называется производной третьего порядка или третьей производной и обозначается $f'''(x)$, то есть

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)'.$$

и т.д.

Во втором разделе так же введено понятие точек локального минимума и максимума и приведены теоремы, необходимые для решения экстремальных задач.

Определение 2.2. Говорят, что функция f имеет в точке x_0 локальный минимум, если существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Аналогично, функция f имеет в точке x_0 локальный максимум, если существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Функция f имеет в точке x_0 локальный экстремум, если она имеет в точке локальный минимум или локальный максимум.

Теорема 2.5 (Ферма). Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум. Тогда справедливо равенство

$$f^{'}(x_0) = 0. \tag{6}$$

Теорема 2.5 предлагает первый шаг в алгоритме решения задачи о поиске локального экстремума дифференцируемой функции. Согласно этой теореме первый отбор состоит в решении уравнения (6). Точки локального экстремума могут находиться только среди корней этого уравнения, которые называются критическими точками функции f. Теорема 2.5 имеет ясную геометрическую интерпретацию: график дифференцируемой функции в точке x_0 локального экстремума имеет касательную, параллельную оси Ox.

Теорема 2.6 (Критерий монотонности функции на интервале). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, то функция является монотонной на этом интервале тогда и только тогда, когда ее производная $f'(x)$ не меняет знак на этом интервале.

Теорема 2.7 (Первое достаточное условие существования экстремума). Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0 и непрерывна в этой точке. Тогда

1) если производная f' меняет знак с «–» на «+» при переходе через точку x_0:

$$f^{'}(x) < 0 \quad \text{при} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{и} \quad f^{'}(x) > 0 \quad \text{при} \quad x_0 < x < x_0 + \delta,$$

то x_0 — точка минимума функции $f(x)$;

2) если производная f' меняет знак с «+» на «–» при переходе через точку x_0:

$$f^{'}(x) > 0 \quad \text{при} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{и} \quad f^{'}(x) < 0 \quad \text{при} \quad x_0 < x < x_0 + \delta,$$

то x_0 — точка максимума функции $f(x)$, где δ – достаточно малое положительное число.

Теорема 2.8 (Второе достаточное условие существования экстремума). Если для дифференцируемой функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 ее производная $f^{'}(x)$ равна нулю, а вторая производная $f^{''}(x)$ существует и отлична от нуля, то есть

$$f^{'}(x_0) = 0 \quad f^{''}(x_0) \neq 0,$$

то в этой точке $f(x)$ имеет экстремум, а именно

1) если $f^{''}(x_0) > 0$, то $f(x_0)$ – минимум функции $f(x)$;

2) если $f^{''}(x_0) < 0$, то $f(x_0)$ – максимум функции $f(x)$.

Рассмотрены примеры на применение всех рассмотренных теорем.

В **третьем** разделе представлены тесты, составленные автором для проверки уровня усвоения школьниками тем, посвященных производной функции и ее применению для анализа функций.

Тестовые задания содержат вопросы теоретического материала и задания на практическое применение полученных знаний. Предлагается несколько вариантов тестов различных уровней сложности от самых базовых до весьма сложных модельных задач. Тесты I уровня содержат 14 заданий с возможностью выбора ответа и 6 заданий, в которых ответ требуется получить самостоятельно. Тесты II второго уровня содержат 10 заданий. Тесты III уровня содержат по 5 заданий повышенной сложности. Тесты каждого уровня рассчитаны на 2 учебных часа.

Приведем примеры вариантов тестов.

Тестовые задания I уровня сложности

А 1. Функцию называют дифференцируемой в точке x_0, если она имеет

1) приращение в точке x_0 2) производную в точке x_0
3) предел при $x \to x_0$ 4) касательную в точке x_0
5) значение в точке x_0

А 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то

1) $f^{'}(x_0) = A$ 2) $f^{'}(x_0) = 0$ 3)$f^{'}(x_0) = x_0$
4) $f^{'}(x_0) = \infty$ 5) $f^{'}(x_0) = f(x_0)$

А 3. Чему равна производная суммы функций $(u + v)'$?

1) $(u + v)' = u' - v'$ 2) $(u + v)' = u' + v'$ 3) $(u + v)' = u'v + uv'$
4) $(u + v)' = u'v'$ 5) $(u + v)' = \dfrac{u'}{v'}$

А 4. Чему равна производная функции $y = x^n$?

1) $(x^n)' = x^{n-1}$ 2) $(x^n)' = x^n$ 3) $(x^n)' = nx^{n-1}$
4) $(x^n)' = (n-1)\,x^{n-1}$ 5) $(x^n)' = \ln nx^n$

А 5. Чему равна производная функции $y = \operatorname{tg} x$?

1) $(\operatorname{tg} x)' = -\operatorname{ctg} x$ 2) $(\operatorname{tg} x)' = \sin x$ 3) $(\operatorname{tg} x)' = \cos x$
4) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{sin^2 x}$ 5) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{cos^2 x}$

А 6. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если график ее производной $f'(x)$ на этом отрезке изображен на рисунке 1

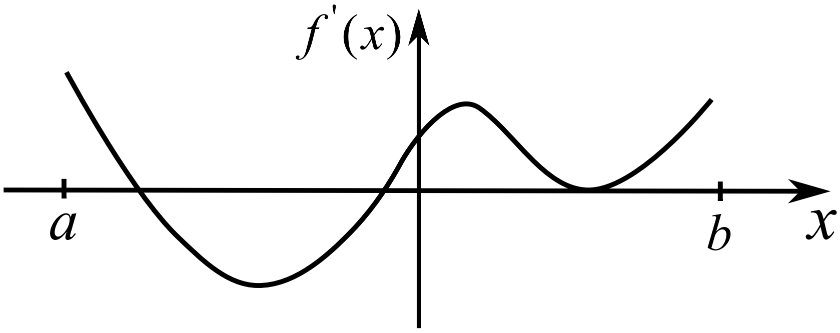

Рисунок 1 График производной $f'(x)$

1) 0 2) 1 3) 2 4) 4 5) 5

А 7. Найдите количество точек экстремума функции $y = 0.6x^5 - 1.5x^4 + x^3 + 4$

1) 0 2) 1 3) 2 4) 4 5) 5

А 8. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{1}{-x^2 + ax - 2}$, если график этой функции проходит через точку $M\left(-3; -\dfrac{1}{19}\right)$

1)$-\dfrac{1}{2}$ 2) $-\dfrac{3}{22}$ 3) $-\dfrac{3}{10}$ 4) -8 5) -4.5

А 9. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$ на отрезке $[1; 9]$

1)-3 2) -1 3) 0 4) -8 5) 3

А 10. Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x+3) + 7$

1) -2.5 2) -1 3) 0 4) 2.5 5) 1

А 11. Найдите наибольшее значение функции $y = 4\cos x - 20x + 7$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

1) $-30\pi + 7$ 2) 11 3) -11 4) $30\pi - 7$ 5) $30\pi + 7$

А 12. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\cdot 2^x - 2^{3x} + 4$ на отрезке $[0; 1]$

1) 2 2) -6 3) 6 4) 0 5) -2

А 13. Найдите точку минимума функции $y = (x + 16)\, e^{x-16}$

1) 12 2) -17 3) -15 4) 17 5) 15

А 14. Найдите середину промежутка убывания функции $y = x - \ln x$

1) 0 2) 0.5 3) 1 4) 1.5 5) 2

Б 1. Найдите значения функции $f(x) = \sqrt{x^3 + 6x^2 - 7}$ в точках экстремума.

Б 2. Найдите точки экстремума функции $y = f'(x)$, если

$$f(x) = 0.5x^2 + 4\ln x + 5.$$

Б 3. Найдите интервалы убывания функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$.

Б 4. Найдите экстремумы функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Б 5. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $f(x) = x^2(x - 3)$ на отрезке $[0, 3]$.

Б 6. Найдите среднее арифметическое наибольшего и наименьшего значения функций $y = 3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 3\lg 7$ на отрезке $[0; 4]$.

Тестовые задания II уровня сложности

Б 1. Найдите значение функции

$$f(x) = 4^{\log_2 \sqrt{\frac{x^2+7}{x-3} + 5}} + 3x^2(cosx + 1) - 6x^2 cos^2 \frac{x}{2}$$

в точках максимума.

Б 2. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{16 - 8x^2 + x^4}{x^2 - 4}.$$

Б 3. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - \frac{6\sqrt{-(4x^5 - 4x^4)}}{\sqrt{1 - x}} + 7.$$

Б 4. При каких значениях m функция

$$f(x) = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 48mx + 6x - 3$$

возрастает на всей числовой прямой.

Б 5. Найдите наибольшее значение a, при котором $x = 6$ является точкой экстремума функции $y = (x - a)^3 - 3x + a$.

Б 6. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции

$$f(x) = -x^2 + 7|x| - 12$$

на отрезке $[-4, 3]$.

Б 7. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции

$$f(x) = \cos^3 x - 3\cos^2 x - 9\cos x + 1$$

на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Б 8. Найдите значение функции $y = e^{-(x+3)\ln(x+4)}$ в точках максимума.

Б 9. Найдите значение функции

$$y = x^3 - 3x^2 - \frac{7^{\sin^2 x}}{7^{-\cos^2 x}}$$

в точке максимума.

Б 10. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(0, 0)$ до точек графика функции $y = \sqrt{x + e^{-x}}$.

Тестовые задания III уровня сложности

В 1. Найти наибольшее значение функции $y = \dfrac{\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{4\cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)+1}$.

В 2. Для каждого положительного числа a найти наибольшее значение функции $y = \dfrac{1}{3}(x-a)^3 + (x-a)^2$ на промежутке $-2 \le x \le 0$.

В 3. Что больше e^π или π^e?

В 4. Докажите, что для функции $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x$ справедливо неравенство $\max\limits_{x\in[-\pi;\pi]} f(x) < 0.77$.

В 5. Какой наибольший объем может иметь правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой имеет длину 1 см?

В **четвертом** разделе представлены результаты апробации тестов. Данные тесты разрабатывались в рамках педагогической практики по теме «Дифференциальное исчисление» в МОУ «Лицей прикладных наук» г. Саратова в 2017 году и были апробированы в 11 классе той же школы.

Ученикам 11 класса было предложено решить тесты каждого уровня. На решение каждого теста давалось 2 учебных часа. С тестами I уровня сложности справилось 80% учеников, с тестами II уровня справилось 35% учеников. Тесты третьего уровня вызвали затруднения, и были решены 5% учеников. В данной работе представлен переработанный вариант тестов, который будет отрабатываться в дальнейшей работе в школе.

Пятый раздел содержит ответы и решения некоторых задач.

В **заключении** приведены результаты магистерской работы.

Основные результаты

1. Определены основные понятия математического анализа, которые изучаются на уроках математики в средней школе, такие как функция, предел функции, непрерывность функции в точке и на интервале. Определены понятия производной функции, точек локального экстремума, наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке, а также рассмотрены необходимые теоремы для решения экстремальных задач.

2. Теоретический материал представлен таким образом, чтобы его можно было бы использовать на уроках математики в средней школе.

3. Были разработаны тестовые материалы для проверки усвоения школьниками теоретического материала по теме «Задачи на экстремум». Представлено несколько вариантов разработанных тестов различных уровней сложности.

4. Данные тесты прошли апробацию в рамках педагогической практики по теме «Дифференциальное исчисление» в МОУ «Лицей прикладных наук» г. Саратова в 2017 году. Результаты апробации показали хороший уровень усвоения школьниками теоретического материала, представленного в данной форме.