Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического анализа

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 3 курса 322 группы

направления 44.04.01 - Педагогическое образование

Механико-математического факультета

Мехова Василия Викторовича

Научный руководитель

старший преподаватель		М. А. Осипцев

Зав. кафедрой

зав. кафедрой, д.ф.-м.н.,профессор		Д. В. Прохоров

Саратов 2017

Введение. Современный период развития общества характеризуется стремительным прогрессом научного знания, быстрой сменой технических идей, математизацией не только науки, но и большинства практических видов деятельности человека, всесторонним применением точных математических методов в самых разнообразных областях. Математика предлагает общие и достаточно четкие модели для изучения окружающей действительности. Роль математических моделей, описывающих взаимосвязь количественных характеристик различных явлений и процессов, возрастает в связи с расширяющимися возможностями компьютерной обработки данных. Довольно часто и в повседневной практике используются математические знания. И это не только простые математические расчеты, но и элементы высшей математики, анализа, теории вероятности. Таким образом, все более широкий спектр математических знаний становится сегодня обязательным элементом общей культуры современного человека.

Одной из тем школьного курса математики, которая вызывает много споров, является «Неопределенный и определенный интегралы». Интеграл появился в школе вследствие реформ школьного математического образования конца 60-х -начала 70-х годов XX века, вводивших в школе элементы математического анализа. Многие специалисты, в частности Гнеденко Б.В., Канторович JI.В., Колмогоров А.Н., Кудрявцев Л.Д., Маркушевич А.И., Понтрягин Л.С., Хинчин А.Я., подчеркивали, что ознакомление учащихся с понятиями и методами математического анализа даже на уровне общих представлений имеет для них большое познавательное, развивающее, общекультурное значение.

Практика показывает, что трудности, возникающие при изучении темы «Неопределенный и определенный» интеграл в средней школе, сохраняются. Об этом говорят в своих работах Дорофеев Г.В., Цукерман В.В. и др. Причины трудностей - высокий уровень абстракции понятий, сложная логическая структура их определений, недостаточность времени для осмысления сложных вопросов и многое другое. Поэтому изучение темы «Определенный интеграл» зависит от необходимости решения многочисленных проблем, связанных как с определением целей изучения курса, с отбором содержания, так и с особенностями методики. Минимизация этих проблем традиционно считалась сложной задачей. В результате их наличие приводит к тому, что знания школьников по теме носят формальный характер, отсутствует структурность знаний. У учащихся не складывается целостного представления о понятии определенного интеграла, а остаются разрозненные, часто не связанные между собой сведения, что не только не способствует развитию математической культуры, но и затрудняет дальнейшее обучение в вузе.

Известно, что для непрерывной функции эквивалентны три подхода к понятию интеграла: интеграл как

1. единственное разделяющее число множеств нижних и верхних сумм Дарбу;
2. предел интегральных сумм;
3. разность значений первообразной.

При этом суммы Дарбу и их свойства играют важнейшую роль в построении теории определенного интеграла во всех достаточно серьезных учебниках по математическому анализу. Чаще всего определенный интеграл как предел интегральных сумм сводится к единственному числу, заключенному между всеми нижними и всеми верхними суммами Дарбу. Прямое определение: «Определенный интеграл - есть единственное число, заключенное между всеми нижними и всеми верхними суммами Дарбу» использовалось Н.Я. Виленкиным.

В настоящий момент изучение темы «Неопределенный и определенный интегралы» в средней школе характеризуется наличием серьезных методических проблем, формальностью усвоения основных понятий этой темы учащимися; а также наличием противоречий между научностью изложения темы и доступностью ее для учащихся, между задачей повышения эффективности и качества образования и недостаточной разработанностью методики изучения темы «Определенный интеграл» в средней школе.

Необходимость решения указанных проблем и противоречий обосновывает выбор темы нашего диссертационного исследования и определяет ее актуальность. Исходя из названных положений, проблемой исследования является недостаточная разработанность методической системы изучения темы «Неопределенный и пределенный интеграл» в средней школе, одновременно сочетающей и доказательность изложения, и доступность для учащихся, реализующей единство трех подходов к понятию определенного интеграла, учитывающей основные тенденции концепции модернизации образования.

Цель исследования - разработка содержания темы «Определенный интеграл» в средней школе, раскрывающей возможности проблемного, доказательного и доступного ее изложения, и определение методических особенностей изучения этой темы, способствующих повышению качества образования. Гипотезу исследования составили предположения о том, что можно одновременно и доказательно, и доступно рассмотреть в средней школе тему «Определенный интеграл», при этом сформировать многосторонний подход к понятию определенного интеграла, познакомить школьников с богатством приложений интеграла, повысить уровень математического развития учащихся, если при введении основных понятий интегрального исчисления использовать эвристический метод, опирающийся на знания и опыт учащихся; ограничить класс рассматриваемых функций: рассматривать функции, монотонные, имеющие первообразную; в качестве исходного подхода к введению интеграла принять подход к интегралу как единственному числу, разделяющему множества верхних и нижних сумм Дарбу. Исходя из сформулированной гипотезы, для достижения цели исследования необходимо было решить следующие задачи:

1. Провести анализ научной, учебно-методической литературы,школьных программ, учебников и учебных пособий, используемых в школе по теме исследования.

2. Разработать тестовые задания 3 уровней по теме «Неопределенный и определенный интегралы».

3. Осуществить экспериментальную проверку разработанной системы изучения темы.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, 7 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения А.

В первом разделе работы рассматриваются первообразная и множество первообразных данной функции, во втором разделе представлены неопределенный и определенный интегралы. В третьем - интегрирование по частям определённого интеграла, в четвертом - замена переменной в определенном интеграле, в пятом - геометрический смысл интеграла, в шестом - площадь криволинейной трапеции, в седьмом представлены тестовые задания 3 уровней по заданной теме.

В заключение работы сделаны основные выводы.

Список использованных источников состоит из 11 наименований.

Основное содержание работы. Первообразная. Множество первообразных данной функции. Действие дифференцирования функции на интервале (a, b) можно истолковать как операционное действие $f \to f'$, сопоставляющее каждой дифференцируемой на (a, b) функции f её производную f'. В таком смысле естественно рассчитывать на возможность обратного сопоставления $f' \to f$, которому дадим специальное название.

Определение 1. *Функция F называется первообразной функции f на интервале (a, b), если f дифференцируема и для всех $x \in (a, b)$ выполняется равенство*

$$F'(x) = f(x)$$

Очевидно, что понятие первообразной является обратным по отношению к производной, а операцию отыскания первообразной разумно воспринимать как сопоставление $f \to F$ или $F' \to F$, то есть действие, обратное к дифференцированию.

Теорема 1. *Если функция f имеет первообразную F на интервале (a, b), то множество всех первообразных функции f на (a, b) имеет вид*

$$\{F + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

Неопределённый и определённый интеграл.

Определение 2. *Пустъ функция f имеет первообразную на отрезке $[a, b]$. Тогда множество всех первообразных функции f на $[a, b]$ называется неопределенным интегралом от функции f на $[a, b]$ обозначается*

$$\int f(x)dx$$

Для нахождения первообразных элементарных функций мы располагаем основной таблицей производных, которую следует прочитать в обратном порядке:

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n \Rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq 1;$$

$$(e^x)' = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x;$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$(\sin(x))' = \cos(x) \Rightarrow \int \cos(x) dx = \sin(x) + C;$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x) \Rightarrow \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C;$$

$$(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \operatorname{tg}(x) + C;$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C;$$

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + C;$$

Более полезным является понятие определенного интеграла.

Определение 3. *Пусть функция f имеет первообразную F на отрезке $[a, b]$. Тогда значение*

$$F(b) - F(a)$$

называется определенным интегралом от функции f на $[a, b]$ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x) dx$$

Теорема 2. *Если функции f и g имеют на отрезке $[a, b]$ первообразные, то функции $\alpha f, \alpha \in \mathbb{R}$, и $f + g$ также имеют первообразные на $[a, b]$ и справедливы формулы*

$$\int\limits_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx$$

$$\int\limits_a^b (f+g)(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$$

Следующая теорема выражает свойство аддитивности определённого интеграла.

Теорема 3. *Если функция f имеет первообразную на отрезке $[a, b]$, то для любой точки $c \in (a, b)$ функция f имеет первообразную на $[a, c]$ и $[c, b]$ и справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Интегрирование по частям определённого интеграла. Прочтение в обратном порядке формулы производной произведения дифференцируемых функций приводит к следующему правилу, называемому интегрированием по частям.

Теорема 4. *Пусть функции f и g дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и по крайней мере одно из двух произведений $f'g$ или fg' имеет первообразную на $[a, b]$. Тогда второе из этих двух произведений также имеет первообразную на $[a, b]$ и справедлива формула интегрирования по частям*

$$\int\limits_a^b f'g(x)dx = (fg)(b) - (fg)(a) - \int\limits_a^b fg'(x)dx$$

Замена переменной в определенном интеграле. Прочтение в обратном порядке формулы производной композиции дифференцируемых функций приводит к следующему правилу, называемому заменой переменой, или подстановкой. Рассмотрим частный случай линейной замены переменной.

Теорема 5. *Если*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

на [a,b], то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C(a \neq 0).$$

Теорема 6. *Пусть функция* $y = f(x)$ *имеет первообразную на отрезке* $[a, b]$, *а функция* $x = \varphi(t)$ *дифференцируема на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *и отображает отрезок* $[\alpha, \beta]$ *на отрезок* $[a, b]$ *так, что* $\varphi(\alpha) = a$ *и* $\varphi(\beta) = b$. *Тогда функция* $y = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ *имеет первообразную на* $[\alpha, \beta]$ *и справедлива формула замены переменной*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dx$$

Геометрический смысл интеграла. Площадь круга воспринимается как предел площадей вписанных в круг правильных многоугольников при неограниченном удвоении их сторон и равный ему предел площадей описанных правильных многоугольников при неограниченном удвоении сторон, в соответствии с рисунком 1. Многоугольники, вписанные в окружность или описанные около нее, выбраны не только потому, что они допускают технически реализуемый алгоритм вычисления площади, а еще потому, что нет других фигур с вычисляемой площадью.

В самом деле, полагая по определению, что площадь квадрата со стороной 1 равна 1, мы приходим к выводу, что площадь квадрата со стороной a равна a^2, а площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab. В соответствии с рисунком

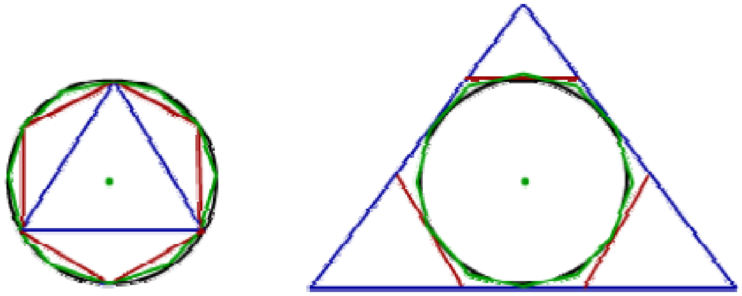

Рисунок 1. Удвоение сторон вписанных и описанных многоугольников

2, нетрудно вывести формулу площади треугольника и фигуры составленной из треугольников, многоугольников. В соответствии с рисунками 4 и 5, переведем

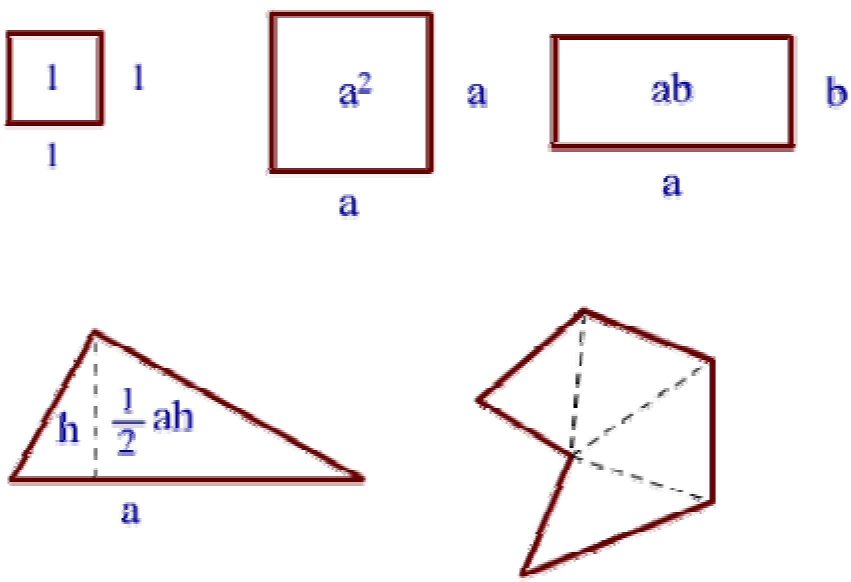

Рисунок 2. Площади фигур, составленные из треугольников

геометрическую идею на язык математического анализа. Построение вписанных многоугольников означает разбиение отрезка [a,b] на части Δ_1,Δ_2...,Δ_n и произведение верхних сторон прямоугольников, которые образуют график некоторой функции f^-, постоянной на каждом из Δ_1,Δ_2...,Δ_n. Так как верхние стороны прямоугольников расположены ниже графика функции f, то $f^- \leq f$. Построение описанных прямоугольников, верхние стороны которых расположены выше графика функции f, приводит к созданию функции f^+, постоянной на каждом из

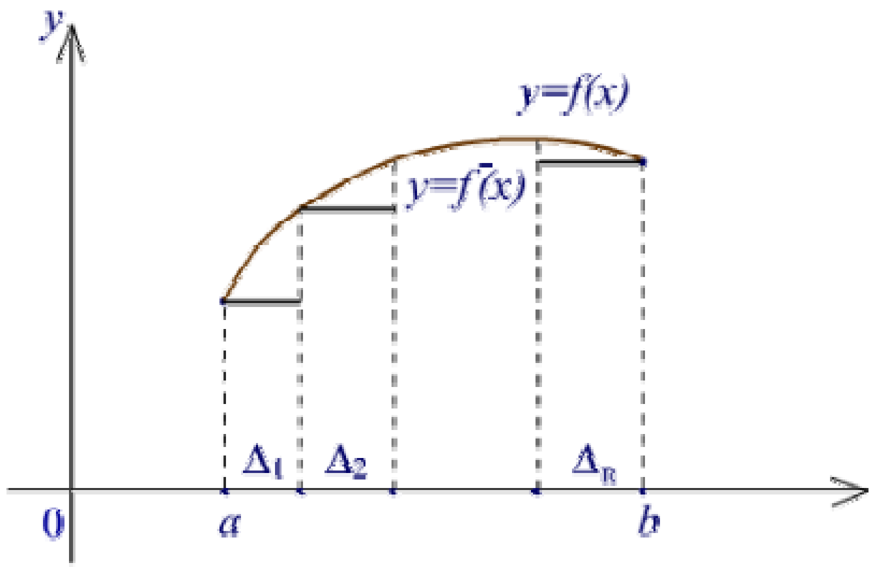

Рисунок 3. Приближение криволинейной трапеции многоугольниками изнутри

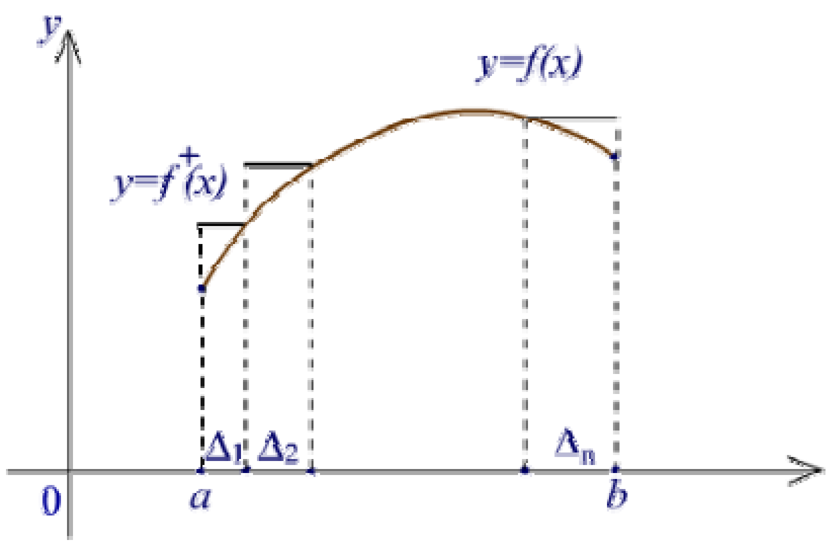

Рисунок 4. Приближение криволинейной трапеции многоугольниками извне

Δ_1,Δ_2...,Δ_n, и такой что, $f^+ \geq f$.

Площадь криволинейной трапеции. В декартовой прямоугольной системе координат xOy дана фигура, ограниченная осью x, прямыми x = a, x = b (a < b) и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке [a;b] функции y = f(x); назовем эту фигуру криволинейной трапеций, в соответствии с рисунком 6.

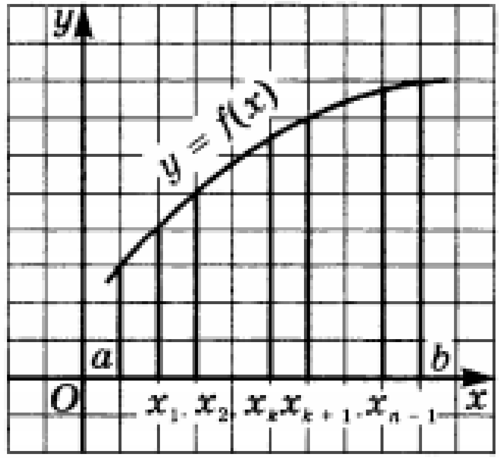

Рисунок 5. Криволинейная трапеция

Заключение. В ходе проведенного исследования была построена целостная методическая система доказательного и доступного изучения темы «Неопределенный и определенный интеграл» в средней школе. Ее особенностями являются:

1. эвристический подход к введению основных понятий интегрального исчисления: они вводятся как естественное разрешение проблемных ситуаций, опираясь на знания и опыт, имеющиеся у учащихся;

2. последовательность рассмотрения известных задач формирует многосторонний подход к определенному интегралу;

3. ограничение использованием функций монотонных и имеющих первообразную, позволяет доказательно, одновременно доступно и наглядно построить процесс изучения темы «Неопределенный и определенный интеграл»;

4. понятие площади криволинейной трапеции рассмотрено с позиции площади квадрируемой фигуры.

В результате исследования разработано методическое обеспечение трехуровневыми тестовыми заданиями темы «Неопределлнный и определенный интеграл» Представленная методическая система доведена до возможности использования учителями на уроках математики и может существенно повысить качество и эффективность обучения, что подтверждается результатами проведенной экспериментальной работы. Внедрение разработанной методической системы в учебный процесс позволит достаточно полно познакомить школьников с понятием интеграла, будет способствовать повышению прочности знаний по этому вопросу, позволит продемонстрировать широкие возможности применения интеграла в различных областях науки, тем самым подготовит их к пониманию современных научных идей и их применения, что приблизит школьное преподавание к современной науке и ее приложениям.