Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и
прикладной математики

Разложение по собственным функциям дифференциального оператора 8-го порядка с нерегулярными краевыми условиями

наименование темы бакалаврской работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки __4___ курса __411___ группы

направления __01.03.02 – Прикладная математика и информатика___________

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета

Тулыниной Анастасии Алексеевны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
старший преподаватель
каф. дифф. ур. и прикл. мат. О.Ю.Дмитриев

должность, уч. степень, уч. звание | подпись,дата | инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор А.П.Хромов

должность, уч. степень, уч.звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Сам термин «спектральная теория» был введен Давидом Гильбертом в первоначальной формулировке теории гильбертовых пространств, которая была сформулирована с использованием квадратичной формы бесконечного числа переменных. Поэтому изначальная версия спектральной теоремы была сформулирована как расширение теоремы о приведении квадратичной формы к главным осям. Более поздние исследования в квантовой механике позволили объяснить особенности спектра атома, что было весьма неожиданным. Имеется три основных формулировки спектральной теории, каждая из которых имеет основания считаться полезной. После изначальной формулировки Гильберта, более поздние исследования спектральной теории нормального оператора в гильбертовом пространстве проводились под нужды физики, в особенности исследования, проводимые фон Нейманом. Дальнейшее развитие теории смогло включить также Банаховы алгебры. Эти исследования привели к представлению Гельфанда, которое полностью покрывает коммутативный случай, и позже к некоммутативному гармоническому анализу.

Важным вопросом в спектральной теории дифференциальных операторов являются вопросы разложения в ряды Фурье по собственным функциям краевой задачи. В отличии от классического случая регулярных краевых условий [1], случай с нерегулярными условиями полностью не изучен. Исследованиям в этом направлении посвящены статьи Хромова А.П. [2], [3]. Развивая идеи Хромова А.П., операторы нечетного порядка рассматривал в своей статье Дмитриев О.Ю. [4]. В данной работе рассматривается пример оператора четного порядка с нерегулярными краевыми условиями.

Функция Грина $G(x, t, \lambda)$ в данном случае имеет экспоненциальный рост при больших $|\lambda|$. Случай экспоненциального роста $G(x, t, \lambda)$ встречался и ранее при исследовании дифференциальных уравнений с нерегулярными распадающимися краевыми условиями, но экспоненциальный рост функции Грина наблюдался только при $t < x$, или только при $t > x$. А в случае нераспадающихся нерегулярных краевых условий экспоненциальный рост функции Грина наблюдается как при $t < x$, так и при $t > x$. Основные трудности связаны с преодолением такого роста, и их удается ликвидировать за счет использования специального функционального уравнения, которому должна удовлетворять разлагаемая функция.

1 Общая характеристика работы

В данной работе рассматривается пример оператора четного порядка с нерегулярными краевыми условиями.

В первом разделе вводятся основные понятия и определения, необходимые для работы.

Во втором разделе дается постановка задачи дипломной работы и вводятся вспомогательные теоремы, которые будут использоваться в дальнейшем.

В третьем разделе рассматривается оценка характеристического определителя.

В четвертом разделе рассматриваются вопросы асимптотики собственных значений и собственных функций.

В пятом разделе рассматриваются и доказываются необходимые условия равномерной сходимости ряда.

В конце приводится список литературы, которая была использована в написании данной дипломной работы, и имеются два приложения.

2 Основные понятия и определения

Определение 1. Пусть D - некоторое множество в линейном пространстве R. Всякая функция A , которая каждому элементу x из D ставит в соответствие некоторый элемент $x' = A(x)$ из R, называется оператором в пространстве R с областью определения D.

Определение 2. Обозначим через

$$y_a, y_a \ldots, y_a^{n-1} y_a, y_a, \ldots y_a^{n-1} \tag{2.1}$$

значения функции y и ее первых $n-1$ производных в точках a,b соответственно. Далее обозначим через $U(t)$ линейную форму относительно переменных (2.1) так, что $U(y)$ имеет вид:

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y_a' + \ldots + \alpha_{n-1} y_a^{n-1} + \beta_0 y_b + \beta_1 y_b' + \ldots + \beta_{n-1} y_b^{n-1}$$

Если задано несколько таких формул $U_v(y), v = 1, 2, \ldots, m$, то равенство $U_v(y) = 0, v = 1, 2, \ldots, m$ называют краевыми условиями.

Определение 3. Последовательность чисел $c_k = \frac{f\varphi_k}{||\varphi||^2}$ называется коэффициентом Фурье элемента f по системе $\{\varphi_k\}$, а ряд

$$\sum_k c_k \varphi_k \tag{2.2}$$

называется рядом Фурье элемента f по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$.

Теорема (Лапласа)**.** Выделим в $detA$ произвольные строки с номерами $\lambda_1 < \ldots < \lambda_k$. Образуем всевозможные миноры k-го порядка с элементами из этих строк:

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_k \\ \beta_1 & \ldots & \beta_k \end{bmatrix}$$

Где $\{\beta_1 < \ldots < \beta_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$

Умножим эти миноры на их алгебраические дополнения в $detA$. Тогда величина $detA$ равна сумме таких произведений по всем возможным выборкам

k элементов $\{\beta_1 < \ldots < \beta_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$detA = \sum_{1 \leq \beta_1 \leq \ldots \beta_k \leq n} A \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_k \\ \beta_1 & \ldots & \beta_k \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \lambda_{k+1} & \ldots & \lambda_n \\ \beta_{k+1} & \ldots & \beta_n \end{bmatrix} (-1)^{\lambda + \ldots + \lambda_k + \beta_1 + \ldots + \beta_k}$$

3 Постановка задачи и вспомогательная теорема

На отрезке $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу

$$y^{(8)} - \lambda y = 0 \tag{3.1}$$

$$(y) = \alpha_i y^{(i-1)}(0) + y^{i-1}(1) = 0, i = \overline{1,8} \tag{3.2}$$

где λ- спектральный параметр. Введем в рассмотрение

$$b_j = \sum_{k=1}^{8} a_k \left(-e^{\frac{\pi i}{8}}\omega_j\right)^{k-1} \tag{3.3}$$

Будем изучать краевую задачу (3.1) – (3.2) при условии, что

$$\begin{aligned} b_1 &= 8 \\ b_2 &= 8 \\ b_3 &= 0 \\ b_4 &= 0 \\ b_5 &= 0 \\ b_6 &= 0 \\ b_7 &= 8 \\ b_8 &= 8 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Возьмем $\lambda = -\rho^8$. Тогда, если ρ пробегает сектор S с вершиной в начале координат, определяемый неравенствами:

$$\frac{\pi}{8} \leq arg\rho \leq \frac{\pi}{8}, 0 \leq |\rho| < \infty$$

то λ пробегает комплексную плоскость. Далее мы будем предполагать, что $\rho \in S$. Обозначим через S_1 и S_2 части сектора S, такие, что если $arg\rho \in [-\frac{\pi}{8}, 0]$, то $\rho \in S_1$, а если $arg\rho \in [0, \frac{\pi}{8}]$, то $\rho \in S_2$

Определение 4. Пусть нормированные краевые условия имеют вид:

$$U_\nu(y) \equiv U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0 \tag{3.5}$$

где

$$U_{\nu 0}(y) = \alpha_\nu y^{(k_\nu)}(0) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} y^{(j)}(0), \tag{3.6}$$

$$U_{\nu 1}(y) = \beta_\nu y^{(k_\nu)}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu j} y^{(j)}(1), \tag{3.7}$$

$n-1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n \geq 0, k_{\nu+2} < k_\nu$ причем для каждого значения индекса ν хотя бы одно из чисел α_ν, β_ν отлично от нуля.

Пусть числа $\widetilde{\omega}_k$ занумерованы в области S так, что $(p\widetilde{\omega}_1) \leq Re(p\widetilde{\omega}_2) \leq \ldots \leq Re(p\widetilde{\omega}_n)$ Тогда нормированные краевые условия (3.5) называются регулярными, если числа θ_0 и θ_1, определяющиеся равенством:

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1 \widetilde{\omega}_1^{k_1} \ldots \alpha_1 \widetilde{\omega}_{\mu-1}^{k_1} (\alpha_1 + s\beta_1) \widetilde{\omega}_\mu^{k_1} & (\alpha_1 + \frac{1}{s}\beta_1) \widetilde{\omega}_{\mu+1}^{k_1} \ldots \beta_1 \widetilde{\omega}_{\mu+2}^{k_1} \ldots \beta_1 \widetilde{\omega}_n^{k_1} \\ \alpha_2 \widetilde{\omega}_1^{k_2} \ldots \alpha_2 \widetilde{\omega}_{\mu-1}^{k_2} (\alpha_2 + s\beta_2) \widetilde{\omega}_\mu^{k_2} & (\alpha_2 + \frac{1}{s}\beta_2) \widetilde{\omega}_{\mu+1}^{k_2} \ldots \beta_2 \widetilde{\omega}_{\mu+2}^{k_2} \ldots \beta_2 \widetilde{\omega}_n^{k_2} \\ \alpha_n \widetilde{\omega}_1^{k_n} \ldots \alpha_n \widetilde{\omega}_{\mu-1}^{k_n} (\alpha_n + s\beta_n) \widetilde{\omega}_\mu^{k_n} & (\alpha_n + \frac{1}{s}\beta_n) \widetilde{\omega}_{\mu+1}^{k_n} \ldots \beta_n \widetilde{\omega}_{\mu+2}^{k_n} \ldots \beta_n \widetilde{\omega}_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

отличны от нуля. Это определение регулярности не зависит от выбора области S, при помощи которой были занумерованы числа $\widetilde{\omega}_k$. Известно [**?**], что уравнение (3.1) в каждом из секторов S_1 и S_2 имеет фундаментальную систему решений:

$$y_j(x) = y_j(x,\rho) = exp(\rho\omega_j x), \omega_j = e^{\frac{(2j-1)\pi i}{8}}, j = \overline{1,8}$$

Определение 5. Преобразованием определителя первого типа называется следующее преобразование:

К первой строке определителя прибавляются все остальные строки, причем каждая j-я строка умножается на $\left(e^{\frac{\pi i}{8}}\right)^{j-1}$.

Определение 6. Преобразованием определителя второго типа называется следующее преобразование:

1. Умножаем каждую j-ю строку определителя на $\left(e^{\frac{\pi i}{n}}\right)^{j-1}$.
2. Перемещаем последний столбец на место первого столбца, последовательно меняя местами два соседних столбца определителя.

Определение 7. Характеристический определитель это определитель вида

$$\Delta(\rho) = det||U_i(y_j)||_1^8$$

где U_i-линейные формы из краевых условий (3.2), y_j фундаментальная система решений уравнения (3.1).

Теорема 1. Условия (3.2) представляют общий вид краевых условий, когда для характеристического определителя $\Delta(\rho)$ справедливо представление:
$\Delta(\rho) = \rho^{28}\{({}_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 + 1)\Delta_0 +$
$(\mathrm{e}^{\rho\omega_1} + e^{\rho\omega_2} + e^{\rho\omega_3} + e^{\rho\omega_4} + e^{\rho\omega_5} + e^{\rho\omega_6} + e^{\rho\omega_7} + e^{\rho\omega_8})\Delta_1 + (e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3)} + e^{\rho(\omega_3+\omega_4)} + e^{\rho(\omega_4+\omega_5)} + e^{\rho(\omega_5+\omega_6)} + e^{\rho(\omega_6+\omega_7)} + e^{\rho(\omega_7+\omega_8)} + e^{\rho(\omega_8+\omega_1)})\Delta_2 + \ldots + (e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} + e^{\rho(\omega_3+\omega_4+\omega_5+\omega_6)} + e^{\rho(\omega_4+\omega_5+\omega_6+\omega_7)} + e^{\rho(\omega_5+\omega_6+\omega_7+\omega_8)} + e^{\rho(\omega_6+\omega_7+\omega_8+\omega_1)} + e^{\rho(\omega_7+\omega_8+\omega_1+\omega_2)} + e^{\rho(\omega_8+\omega_1+\omega_2+\omega_3)})\Delta_{14} + \ldots + (e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5+\omega_6+\omega_7)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5+\omega_6+\omega_7+\omega_8)} + e^{\rho(\omega_3+\omega_4+\omega_5+\omega_6+\omega_7+\omega_8+\omega_1)} + e^{\rho(\omega_4+\omega_5+\omega_6+\omega_7+\omega_8+\omega_1+\omega_2)} + e^{\rho(\omega_5+\omega_6+\omega_7+\omega_8+\omega_1+\omega_2+\omega_3)} + e^{\rho(\omega_6+\omega_7+\omega_8+\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + e^{\rho(\omega_7+\omega_8+\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} + e^{\rho(\omega_8+\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5+\omega_6)})\Delta_{34}\}$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7, \Delta_8, \Delta_9, \Delta_{10}, \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{15}, \Delta_{16}, \Delta_{17}, \Delta_{18}, \Delta_{19}, \Delta_{20}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23}, \Delta_{24}, \Delta_{25}, \Delta_{26}, \Delta_{27}, \Delta_{28}, \Delta_{29}, \Delta_{30}, \Delta_{31}, \Delta_{32}, \Delta_{33}, \Delta_{34}$ определители следуюшего вида:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 & \omega_7 & \omega_8 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \omega_4^2 & \omega_5^2 & \omega_6^2 & \omega_7^2 & \omega_8^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3 & \omega_4^3 & \omega_5^3 & \omega_6^3 & \omega_7^3 & \omega_8^3 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & \omega_4^4 & \omega_5^4 & \omega_6^4 & \omega_7^4 & \omega_8^4 \\ \omega_1^5 & \omega_2^5 & \omega_3^5 & \omega_4^5 & \omega_5^5 & \omega_6^5 & \omega_7^5 & \omega_8^5 \\ \omega_1^6 & \omega_2^6 & \omega_3^6 & \omega_4^6 & \omega_5^6 & \omega_6^6 & \omega_7^6 & \omega_8^6 \\ \omega_1^7 & \omega_2^7 & \omega_3^7 & \omega_4^7 & \omega_5^7 & \omega_6^7 & \omega_7^7 & \omega_8^7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ \omega_1 & a_2\omega_2 & a_2\omega_3 & a_2\omega_4 & a_2\omega_5 & a_2\omega_6 & a_2\omega_7 & a_2\omega_8 \\ \omega_1^2 & a_3\omega_2^2 & a_3\omega_3^2 & a_3\omega_4^2 & a_3\omega_5^2 & a_3\omega_6^2 & a_3\omega_7^2 & a_3\omega_8^2 \\ \omega_1^3 & a_4\omega_2^3 & a_4\omega_3^3 & a_4\omega_4^3 & a_4\omega_5^3 & a_4\omega_6^3 & a_4\omega_7^3 & a_4\omega_8^3 \\ \omega_1^4 & a_5\omega_2^4 & a_5\omega_3^4 & a_5\omega_4^4 & a_5\omega_5^4 & a_5\omega_6^4 & a_5\omega_7^4 & a_5\omega_8^4 \\ \omega_1^5 & a_6\omega_2^5 & a_6\omega_3^5 & a_6\omega_4^5 & a_6\omega_5^5 & a_6\omega_6^5 & a_6\omega_7^5 & a_6\omega_8^5 \\ \omega_1^6 & a_7\omega_2^6 & a_7\omega_3^6 & a_7\omega_4^6 & a_7\omega_5^6 & a_7\omega_6^6 & a_7\omega_7^6 & a_7\omega_8^6 \\ \omega_1^7 & a_8\omega_2^7 & a_8\omega_3^7 & a_8\omega_4^7 & a_8\omega_5^7 & a_8\omega_6^7 & a_8\omega_7^7 & a_8\omega_8^7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ \omega_1 & \omega_2 & a_2\omega_3 & a_2\omega_4 & a_2\omega_5 & a_2\omega_6 & a_2\omega_7 & a_2\omega_8 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & a_3\omega_3^2 & a_3\omega_4^2 & a_3\omega_5^2 & a_3\omega_6^2 & a_3\omega_7^2 & a_3\omega_8^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & a_4\omega_3^3 & a_4\omega_4^3 & a_4\omega_5^3 & a_4\omega_6^3 & a_4\omega_7^3 & a_4\omega_8^3 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & a_5\omega_3^4 & a_5\omega_4^4 & a_5\omega_5^4 & a_5\omega_6^4 & a_5\omega_7^4 & a_5\omega_8^4 \\ \omega_1^5 & \omega_2^5 & a_6\omega_3^5 & a_6\omega_4^5 & a_6\omega_5^5 & a_6\omega_6^5 & a_6\omega_7^5 & a_6\omega_8^5 \\ \omega_1^6 & \omega_2^6 & a_7\omega_3^6 & a_7\omega_4^6 & a_7\omega_5^6 & a_7\omega_6^6 & a_7\omega_7^6 & a_7\omega_8^6 \\ \omega_1^7 & \omega_2^7 & a_8\omega_3^7 & a_8\omega_4^7 & a_8\omega_5^7 & a_8\omega_6^7 & a_8\omega_7^7 & a_8\omega_8^7 \end{vmatrix}$$

$\ldots$

$$\Delta_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & a_2\omega_5 & a_2\omega_6 & a_2\omega_7 & a_2\omega_8 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \omega_4^2 & a_3\omega_5^2 & a_3\omega_6^2 & a_3\omega_7^2 & a_3\omega_8^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3 & \omega_4^3 & a_4\omega_5^3 & a_4\omega_6^3 & a_4\omega_7^3 & a_4\omega_8^3 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & \omega_4^4 & a_5\omega_5^4 & a_5\omega_6^4 & a_5\omega_7^4 & a_5\omega_8^4 \\ \omega_1^5 & \omega_2^5 & \omega_3^5 & \omega_4^5 & a_6\omega_5^5 & a_6\omega_6^5 & a_6\omega_7^5 & a_6\omega_8^5 \\ \omega_1^6 & \omega_2^6 & \omega_3^6 & \omega_4^6 & a_7\omega_5^6 & a_7\omega_6^6 & a_7\omega_7^6 & a_7\omega_8^6 \\ \omega_1^7 & \omega_2^7 & \omega_3^7 & \omega_4^7 & a_8\omega_5^7 & a_8\omega_6^7 & a_8\omega_7^7 & a_8\omega_8^7 \end{vmatrix}$$

$\ldots$

$$\Delta_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a_1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 & \omega_7 & a_2\omega_8 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \omega_4^2 & \omega_5^2 & \omega_6^2 & \omega_7^2 & a_3\omega_8^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3 & \omega_4^3 & \omega_5^3 & \omega_6^3 & \omega_7^3 & a_4\omega_8^3 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & \omega_4^4 & \omega_5^4 & \omega_6^4 & \omega_7^4 & a_5\omega_8^4 \\ \omega_1^5 & \omega_2^5 & \omega_3^5 & \omega_4^5 & \omega_5^5 & \omega_6^5 & \omega_7^5 & a_6\omega_8^5 \\ \omega_1^6 & \omega_2^6 & \omega_3^6 & \omega_4^6 & \omega_5^6 & \omega_6^6 & \omega_7^6 & a_7\omega_8^6 \\ \omega_1^7 & \omega_2^7 & \omega_3^7 & \omega_4^7 & \omega_5^7 & \omega_6^7 & \omega_7^7 & a_8\omega_8^7 \end{vmatrix}$$

4 Оценка характеристического определителя

Теорема 2. Имеют место следующие выражения: $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 = 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 \neq 0, \Delta_7 = 0, \Delta_8 \neq 0, \Delta_9 \neq 0, \Delta_{10} = 0, \Delta_{11} = 0, \Delta_{12} \neq 0, \Delta_{13} = 0, \Delta_{14} = 0, \Delta_{15} \neq 0, \Delta_{16} \neq 0, \Delta_{17} \neq 0, \Delta_{18} \neq 0, \Delta_{19} \neq 0, \Delta_{20} = 0, \Delta_{21} \neq 0, \Delta_{22} = 0, \Delta_{23} = 0, \Delta_{24} = 0, \Delta_{25} = 0, \Delta_{26} \neq 0, \Delta_{27} \neq 0, \Delta_{28} \neq 0, \Delta_{29} \neq 0, \Delta_{30} = 0, \Delta_{31} = 0, \Delta_{32} \neq 0, \Delta_{33} \neq 0, \Delta_{34} = 0.$

Доказательство. В процессе доказательства теоремы вычисляем определители, применяя преобразования первого и второго типа. При этом учитываем, что

$$\sum_{k=1}^{8} \left(-e^{\frac{\pi i}{8}}\omega_j\right)^{k-1} = \begin{cases} 8, & \text{если } j = 4, \\ 0, & \text{если } j \neq 4, \end{cases}$$

и условия(3.4) Часть определителей была подсчитана в самой дипломной работе, а остальные определители подсчитаны с помощью программного комплекса Mathcad. На первом этапе подсчитываем a_j из краевых условий (3.2) учитывая условия (3.4). В результате получаем значения a_j (см. приложение А). На втором этапе полученные значения a_j подставляем в определители. Все, кроме Δ_1 получились не нулевые (см. приложение Б).

Теорема 3.

$$\Delta(\rho) = \rho^{28}\left(e^{\rho(\omega_1+\omega_8)}\Delta_2\left(1 + e^{\rho(\omega_7-\omega_1)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\right), \rho \in S_2$$

$$\Delta(\rho) = \rho^{28}\left(e^{\rho(\omega_1+\omega_8)}\Delta_2\left(1 + e^{\rho(\omega_2-\omega_8)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\right), \rho \in S_1$$

где $\omega_j = e^{\frac{(2j-1)\pi i}{8}}$ для $j = \overline{1,8}$

Теорема 4. Для собственных чисел λ_k справедливы асимптотические формулы:

$$\lambda_k = -\rho_k^8$$

,

$$\rho_{k+h} = \rho_k^0 + O(\frac{1}{\rho}), k = 0, 1, 2, \ldots$$

Где h – некоторое целое число, которое не зависит от k и

$$\rho_k^0 = \frac{(2k+1)\pi}{2\cos\frac{\pi}{8}} e^{\frac{\pi}{8}}, \rho \in S_2$$

$$\rho_k^0 = \frac{(2k+1)\pi}{2\cos\frac{\pi}{8}} e^{-\frac{\pi}{8}}, \rho \in S_1$$

Теорема 5. Для (ρ)справедлива оценка:

$$\Delta(\rho) \geq C|\rho^{28}||e^{\omega_1+\omega_8}|$$

,

$$|\frac{1}{\Delta(\rho)} \leq \frac{C}{|\rho^{28}e^{\rho(\omega_1+\omega_8)}|}|$$

Для $\rho \in S_1$ и S_2.

Теорема 6. Имеют место следующие выражения:$\widetilde{\Delta}_1 \neq 0, \widetilde{\Delta}_2 \neq 0, \widetilde{\Delta}_3 \neq 0, \widetilde{\Delta}_4 \neq 0, \widetilde{\Delta_5} \neq 0, \widetilde{\Delta}_6 \neq 0, \widetilde{\Delta_7} \neq 0, \widetilde{\Delta}_8 \neq 0, \widetilde{\Delta}_9 \neq 0, \widetilde{\Delta}_{10} \neq 0, \widetilde{\Delta}_{11} \neq 0, \widetilde{\Delta}_{12} \neq 0, \widetilde{\Delta}_{13} \neq 0, \widetilde{\Delta}_{14} \neq 0$.

Определители высчитываются с использованием Mathcad, результаты предоставлены в приложении В.

$$\widetilde{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} \omega_1 & a_2\omega_2 & a_2\omega_3 & a_2\omega_4 & a_2\omega_5 & a_2\omega_6 & a_2\omega_7 \\ \omega_1^2 & a_3\omega_2^2 & a_3\omega_3^2 & a_3\omega_4^2 & a_3\omega_5^2 & a_3\omega_6^2 & a_3\omega_7^2 \\ \omega_1^3 & a_4\omega_2^3 & a_4\omega_3^3 & a_4\omega_4^3 & a_4\omega_5^3 & a_4\omega_6^3 & a_4\omega_7^3 \\ \omega_1^4 & a_5\omega_2^4 & a_5\omega_3^4 & a_5\omega_4^4 & a_5\omega_5^4 & a_5\omega_6^4 & a_5\omega_7^4 \\ \omega_1^5 & a_6\omega_2^5 & a_6\omega_3^5 & a_6\omega_4^5 & a_6\omega_5^5 & a_6\omega_6^5 & a_6\omega_7^5 \\ \omega_1^6 & a_7\omega_2^6 & a_7\omega_3^6 & a_7\omega_4^6 & a_7\omega_5^6 & a_7\omega_6^6 & a_7\omega_7^6 \\ \omega_1^7 & a_8\omega_2^7 & a_8\omega_3^7 & a_8\omega_4^7 & a_8\omega_5^7 & a_8\omega_6^7 & a_8\omega_7^7 \end{vmatrix}$$

$$\widetilde{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & a_2\omega_3 & a_2\omega_4 & a_2\omega_5 & a_2\omega_6 & a_2\omega_7 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & a_3\omega_3^2 & a_3\omega_4^2 & a_3\omega_5^2 & a_3\omega_6^2 & a_3\omega_7^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & a_4\omega_3^3 & a_4\omega_4^3 & a_4\omega_5^3 & a_4\omega_6^3 & a_4\omega_7^3 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & a_5\omega_3^4 & a_5\omega_4^4 & a_5\omega_5^4 & a_5\omega_6^4 & a_5\omega_7^4 \\ \omega_1^5 & \omega_2^5 & a_6\omega_3^5 & a_6\omega_4^5 & a_6\omega_5^5 & a_6\omega_6^5 & a_6\omega_7^5 \\ \omega_1^6 & \omega_2^6 & a_7\omega_3^6 & a_7\omega_4^6 & a_7\omega_5^6 & a_7\omega_6^6 & a_7\omega_7^6 \\ \omega_1^7 & \omega_2^7 & a_8\omega_3^7 & a_8\omega_4^7 & a_8\omega_5^7 & a_8\omega_6^7 & a_8\omega_7^7 \end{vmatrix}$$

и так далее.

Теорема 7. Обозначим

$$\varphi(x,\rho) = \begin{vmatrix} y_1(x,\rho) & ... & y_8(x,\rho) \\ U_{21} & ... & U_{28} \\ U_{81} & ... & U_{88} \end{vmatrix},$$

где $U_{ij} = U_i(y)_j$

Если $\rho = \rho_k$, то φ – собственная функция и представима в следующем виде:

$$\varphi(x,\rho) = \rho^{28}\left(e^{\rho(\omega_1+\omega_7+\omega_8)}\left(e^{\rho\omega_1(x-1)}\left(\widetilde{\Delta_1} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) + e^{\rho\omega_2(x+1)}\left(\widetilde{\Delta_2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) + \right.\right.$$
$$+e^{\rho\omega_3 x+\rho\omega_4}\left(\widetilde{\Delta_3} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) + e^{\rho\omega_4 x}\left(\widetilde{\Delta_4} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) + e^{\rho\omega_5(x-1)}\left(\widetilde{\Delta_5} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) +$$
$$\left.\left. +e^{\rho\omega_6(x-1)}\left(\widetilde{\Delta_6} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) + e^{\rho\omega_7 x}\left(\widetilde{\Delta_7} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) + e^{\rho\omega_8(x-1)}\left(\widetilde{\Delta_8} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\right)\right)$$

Теорема 8. Для $\varphi(x,\rho_k)$ справедливы оценки

$$\varphi(x,\rho_k) = O(\rho^{28}e^{\rho(\omega_1+\omega_7+\omega_8)}e^{\rho\omega_6 x}), x \in [0,d]$$
$$\varphi(x,\rho_k) = O(\rho^{28}e^{\rho(\omega_1+\omega_7+\omega_8)}e^{\rho\omega_8(x-1)}), x \in [d,1]$$

5 Необходимое условие сходимости ряда

Рассмотрим ряд

$$\sum \alpha_k \varphi(x\rho_k) \tag{5.1}$$

Теорема 9. Если ряд 5.1 сходится в точке $x = \alpha$, где $\alpha \in [0, d]$, то он сходится абсолютно и равномерно внутри $T_{1-\alpha}$ к аналитической функции. Если он сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$, где $d < \alpha < \beta \leq 1$, то он сходится абсолютно и равномерно внутри T_α к аналитической функции.

Теорема 10. Пусть ряд по собственным функциям данного оператора равномерно сходится на $[0, 1]$ и $f(x)$ его сумма

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l \varphi(x, \rho l) = f(x)$$

Пусть μ не собственное значение нашей краевой задачи.

$$\begin{cases} y^n = \mu y \\ U_0(y) = 0 \end{cases}$$

Тогда функция

$$g(x) = R_\mu f(x) = \int_0^1 g(x, \xi, \mu) f(\xi) d\xi$$

где $(A - \mu E)^{-1} = R_\mu$ - резольвента, удовлетворяет следующим условиям:

1. Регулярно продолжима в область T_1
2. Ограничена в угле $\left|arg z + \frac{\pi}{8}\right| \leq \frac{\pi}{3}, |z| \leq |z_0|$;
3. Удовлетворяет функциональному уравнению $\Phi(g, x) = 0$, при $x \in (0, Re\omega_1)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дипломной работе получены асимптотическая формула для характеристического определителя, а также для собственных значений и собственных функций. В результате исследований получены необходимые условия разложения функций в ряд по собственным присоединенным функциям линейного дифференциального оператора шестого порядка с нерегулярными краевыми условиями (теорема 13). Полученные результаты сходны с результатами Хромова А.П. [3] и Дмитриева О.Ю. [4].