Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной информатики
наименование кафедры

РЕЗОЛЬВЕНТНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
код и наименование направления

Механико-математического факультета
наименование факультета

Завражнова Юрия Александровича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор		А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой:

д.ф.-м.н., профессор		А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017 год

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Данная работа посвящена проблеме обоснования метода Фурье в смешанных задачах для уравнений с частными производными. Рассматриваются два новых подхода, по сравнению со стандартной схемой обоснования. Первый подход, предложенный В.А.Чернятиным, состоит в отказе от почленного дифференцирования формального решения смешанной задачи. Идея второго подхода, вытекающая из исследований А.Н. Крылова и В.А. Чернятина, основана на методе контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного соответствующей спектральной задачей. Данный резольвентный подход, предложенный А.П. Хромовым, реализуется в смешанной задаче для волнового уравнения.

Метод Фурье используется при решении задач математической физики, интерес к которым постоянно поддерживается их разнообразными и многочисленными приложениями. Именно поэтому нахождение условий разрешимости подобных задач является актуальным вопросом на сегодняшний день.

Цель работы. Необходимо получить классическое решение данной смешанной задачи, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях.

Структура работы. Магистерская работа содержит 50 страниц машинописного текста и состоит из введения, двух разделов (Методология подхода В.А. Чернятина к обоснованию метода Фурье, Резольвентный подход для волнового уравнения) и списка использованных источников (21 наименование).

Научная новизна. В магистерской работе излагается новый научный подход к обоснованию метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения, который позволяет минимизировать требования на исходные данные. Приведены строгие математические доказательства. Данные результаты имеют высокую научную значимость.

Положения, выносимые на защиту. Подробно изложены два подхода к обоснованию метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения и дана их сравнительная характеристика.

Основное содержание работы

В **Введении** обозначено направление исследований, приведены некоторые утверждения, используемые в дальнейшем, и основные результаты.

В **Разделе I** вводится в рассмотрение и исследуется следующая смешанная задача для однородного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + p(x)u(x,t) = 0, \tag{1}$$

с вещественным потенциалом

$$p(x) \in C[0,\pi], \tag{2}$$

относительно искомой функции $u(x,t)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \forall t \in [0,T], \tag{3}$$

и начальным данным Коши

$$u(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{4}$$

Основная цель: найти функцию

$$u(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \tag{5}$$

удовлетворяющую в обычном смысле уравнению (1) в открытом прямоугольнике Q, а также граничным (3) и начальным (4) условиям.

В подразделе 1.1 приводятся некоторые соображения в пользу выбора класса допустимых решений в виде (5). Затем показывается, что из существования решения $u(x,t) \in C^2(Q)\bigcap C(\overline{Q})$ смешанной задачи (1), (3), (4) следует его принадлежность классу (5).

В подразделе 1.2 определяются необходимые условия разрешимости задачи (1) – (5). А именно

$$\varphi(x) \in C_0^2[0, \pi], \tag{6}$$

$$\psi(x) \in C_0^1[0, \pi], \tag{7}$$

$$\varphi''(0) = \varphi''(\pi), \tag{8}$$

и условие (2) являются минимальными требованиями к исходным данным смешанной задачи (1)-(5). Ставится вопрос об их достаточности для существования искомого решения $u(x, t)$.

Далее по тексту формулируется теорема о разрешимости смешанной задачи (1)-(5).

Теорема 1.3. Решение $u(x, t)$ смешанной задачи (1)-(5) существует и единственно тогда и только тогда, когда начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям (6)-(8). При этом оно дается функциональным рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\Phi_n \cos \omega_n t + \frac{\Psi_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) y_n(x). \tag{9}$$

Здесь ω_n^2 и y_n – собственные значения и соответствующие им нормированные собственные функции системы Штурма – Лиувилля

$$-y''(x) + p(x)y(x) = \omega^2 y(x),$$
$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

$q(x) \in C[0, \pi]$ – вещественный потенциал, а Φ_n и Ψ_n – коэффициенты Фурье начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по полной ортонормированной в $L_2(0, \pi)$

системе $\{y_n(x)\}_1^\infty$, определяемые в соответствии с формулой:

$$\int\limits_0^\pi f(x)y_n(x)\,dx.$$

В подразделе 1.3 исследуются свойства гладкости функционального ряда (9), предполагая выполненными условия (2) и (6)-(8). Вначале доказывается равномерная сходимость формального ряда (9) на замыкании $\overline{Q}$. Потом сумма ряда (9) обозначается через $W(x,t)$. Ниже по тексту будет установлено, что при выполнении условий (2), (6)-(8) следует что $W(x,t) \in C^2(\overline{Q})$.

Ряд (9) представляется в виде двух составляющих: регулярной и сингулярной:

$$W(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + \sum_{i=1}^{3} W_i(x,t), \tag{10}$$

где

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{n^2} \cos(nt)\sin(nx), \tag{11}$$

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{n} \sin(nt)\sin(nx), \tag{12}$$

$$W_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\theta_n}{n^2}(\cos\omega_n t - \cos(nt)) + \frac{\psi_n}{n}(\sin\omega_n t - \sin(nt))\right]\sin(nx), \tag{13}$$

$$W_2(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\theta_n}{n^2}\cos\omega_n t + \frac{\psi_n}{n}\sin\omega_n t\right) h_n(x), \tag{14}$$

$$W_3(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^3}(\cos\omega_n t + A_n \sin\omega_n t) y_n(x), \tag{15}$$

$\theta_n = n^2\varphi_n + z_n,$

$$\theta_n = \gamma_n. \tag{16}$$

Величина θ_n является синус-коэффициентом Фурье функции $\theta(x) = z(x) - \varphi''(x) \in C_0[0, \pi]$. Оказывается, от свойств функции $\theta(x)$ полностью зависит вопрос разрешимости задачи (1)-(5).

В подразделе 1.4 исследуется гладкость второго порядка функций $W_i(x,t)$.

В подразделе 1.5 проводится суммирование функциональных рядов (11) и (12), представляющих собой сингулярную составляющую суммы из (10).

В подразделе 1.6 доказывается что сумма $W(x,t)$ ряда (9) является формальным решением смешанной задачи (1)-(5), а также, что при выполнении условий (6)-(8) формальное решение $W(x,t)$ удовлетворяет условиям $U_iW(0,t) + V_iW(\pi,t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$ и $W(x,t)$ существования искомого классического решения $u(x,t)$.

В **Разделе II** дается дальнейшее развитие подхода В.А. Чернятина путем привлечения метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье.

Вводится в рассмотрение следующая задача:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - p(x)u(x,t), \tag{17}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{18}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), {u'}_t(x,0) = 0. \tag{19}$$

Считаем, что $p(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначная, и

$$\varphi(x) \in C^2[0,1],\ \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0. \tag{20}$$

В подразделе 2.1 проводится преобразование формального решения по методу Фурье задачи (17)-(19).

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + p(x)y(x), \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

Теорема 2.1. Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые, и для них имеют место асимптотические формулы: $\lambda_n = \rho_n^2, \rho_n = \pi n + O(1/n)$, $(n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$.

Далее по тексту вводятся обозначения: $\gamma_n = \{\rho | \, |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geq n_0$ и n_0 таково, что при всех $n \geq n_0$ внутрь и на границу γ_n попадает лишь по одному из ρ_n. Пусть $\tilde{\gamma}_n$ образ γ_n в λ-плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$). Обозначим через R_λ резольвенту оператора L, т.е. $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E - единичный оператор, λ - спектральный параметр. Тогда по методу Фурье формальное решение задачи (17)–(19) представимо в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda + \sum_{n \geq n_0} (\varphi, \psi_n) \varphi_n(x) \cos \rho_n t, \qquad (21)$$

где $r > 0$ фиксировано и взято таким, что все собственные значения меньшие по модулю r имеют номера меньшие n_0, на контуре $|\lambda| = r$ нет собственных значений, $\varphi_n(x)$ собственная функция оператора L для собственного значения λ_n, система $\{\psi_n(x)\}$ биортогональна системе $\{\varphi_n(x)\}$.

Представим (21) в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda, \qquad (22)$$

и произведем дальнейшее преобразование полученного ряда.

Лемма 2.1. Пусть μ_0 не является собственным значением оператора L и таково, что $|\mu_0| > r$ и μ_0 не находится внутри и на границе $\tilde{\gamma}_n$ ни при каком $n \geq n_0$. Тогда

$$\int\limits_{\tilde{\gamma}_n} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda = \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g) \cos \rho t d\lambda, \qquad (23)$$

где $g = (L - \mu_0 E)\varphi$.

Теорема 2.2. Для формального решения $u(x,t)$ имеет место формула

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \qquad (24)$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{R^0_\lambda g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{R^0_\lambda g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R^0_\lambda g]\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R^0_\lambda g]\cos\rho t d\lambda,$$

$R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ - резольвента оператора L_0, который есть оператор L при $p(x) \equiv 0$ (считаем, что вышеприведенные требования на μ_0 выполняются и для оператора L_0).

В подразделе 2.2 получаем точную формулу для $u_0(x,t)$.

Лемма 2.3. Имеет место формула:

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R^0_\lambda\varphi_1)\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}(R^0_\lambda\varphi_1)\cos\rho t d\lambda, \qquad (25)$$

где $\varphi_1 = R^0_\lambda g$.

Для дальнейшего потребуется точная формула для резольвенты R_λ. Обозначим через $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ решения уравнения

$$y'' - p(x)y + \rho^2 y = 0$$

с начальными условиями

$$z_1(0,\rho) = 1, \qquad {z'}_1(0,\rho) = 0, \qquad z_2(0,\rho) = 0, \qquad {z'}_2(0,\rho) = 1.$$

Теорема 2.3. Для резольвенты R_λ имеет место формула:

$$R_\lambda f = -z_2(x,\rho)(f,z_1) + v(x,\rho)(f,z_2) + (M_\rho f)(x), \qquad (26)$$

где $v(x,\rho)=\frac{z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)}$, $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$, $(M_\rho f)(x)=\int\limits_0^x M(x,t,\rho)f(t)dt$, $M(x,t,\rho)=\begin{vmatrix} z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho) \\ z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \end{vmatrix}$.

В подразделе 2.3 проводится исследование ряда $u_2(x,t)$. Теорема 2.3 приводит к следующему представлению для $u_2(x,t)$:

$$u_2(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=n_0}^{\infty}\int\limits_{\tilde\gamma_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}\left[v(x,\rho)(g,z_2)-v^0(x,\rho)(g,z_2^0)\right]\cos\rho t d\lambda.$$

Ниже по тексту приводится несколько хорошо известных фактов об асимптотике $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$, требующихся для дальнейших доказательств. Положим

$$a_n(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{2\rho\cos\rho t}{\lambda-\mu_0}\left[v(x,\rho)(g,z_2)-v^0(x,\rho)(g,z_2^0)\right]d\rho.$$

Лемма 2.9. Ряды $\sum a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$, $\sum a^{(j)}_{n,t^j}(x,t)$ $(j=0,1,2)$ сходятся абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$ и $t\in[-T,T]$, где $T>0$ любое фиксированное число.

Из того, что $u_2(x,t)=\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n(x,t)$, следует

Лемма 2.10. Ряд $u_2(x,t)$ допускает почленное дифференцирование дважды по x и t при $x\in[0,1]$ и $t\in(-\infty,\infty)$.

Основные результаты подраздела 2.4 и всего второго раздела сформулированы в теореме 2.10.

Теорема 2.7. Формальное решение (21) есть классическое решение задачи (17)–(19) при минимальных условиях (20) на $\varphi(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены и подробно изложены новые подходы к обоснованию метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения в случае условий закрепления.

Основным результатом работы является получение необходимых и достаточных условий существования классического решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения, а также нахождение классического решения одномерного волнового уравнения путем привлечения метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье.