Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
наименование кафедры

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТРЕСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
код и наименование направления

механико-математический факультета
наименование факультета

Гасановой Анастасии Нурмагомедовны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент.к.ф.-м.н. ______________________ В.П.Курдюмов
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Зав. кафедрой:
д.ф.-м.н.,профессор ____________________ А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2017 г.

Введение

Традиционно обоснование метода Фурье в задачах математической физики опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз. Впервые строгое обоснование метода Фурье, основанное на такой точке зрения, было дано В. А. Стекловым и в последующем именно так проводилось обоснование метода Фурье для большинства задач математической физики. Эта точка зрения сделала метод Фурье очень популярным, было проведено большое количество исследований и достигнуты значительные успехи.

Законность указанных операций дифференцирования приводит к завышению требований на исходные данные задачи, не вызванные самой ее постановкой. Выход из этого положения намечен А. Н. Крыловым в его исследованиях по ускорению сходимости рядов Фурье и им подобных. Суть его приема состоит в том, что вопрос о дифференцировании ряда Фурье решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется (и тем самым в этом случае не надо прибегать к почленному дифференцированию), а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать. Им были успешно преодолены трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования на ряде конкретных прикладных задач.

В. А. Чернятин приемом А. Н. Крылова с применением уточненной асимптотики собственных значений и собственных функций исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, и в ряде случаев эти условия гладкости стали минимально возможными. Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А. Н. Крылова и В. А. Чернятина, есть качественно новый шаг, позволяющий с исчерпывающей полнотой исследовать краевые задачи методом Фурье и ставящий много вопросов и в теории функций.

В статье "Резольвентный подход для волнового уравнения 2015 г. (М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов)"А. П. Хромов предложил новый способ использования приема А. Н. Крылова, опирающийся на метод Коши Ц Пуанкаре интегрирования по спектральному параметру резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей по методу Фурье, который получил свое дальнейшее развитие, описанное в статьях "Резольвентный подход к методу

Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения"авторов: Хромов А. П.,Корнев В.В. и "Резольвентный подход в методе Фурье для волнового уравнения в несамосопряженном случае".

В настоящей работе,в отличие от статей, где начальные условия смешанных задач для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t)$$

имеют вид

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = 0, \tag{1}$$

мы рассмотрим такие начальные условия:

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{2}$$

В результате, используя резольвентный подход в методе Фурье, мы получим классические решения двух смешанных задач с начальными условиями (2) при минимальных условиях на $\psi(x)$ и краевыми условиями

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0 \tag{3}$$

для одной из них и

$$u'_x(0,t) + \beta u_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = \alpha u(0,t) + u(1,t) = 0 \tag{4}$$

для другой, притом, что в условиях (4) $1 + \alpha\beta \neq 0$. Эти две задачи вместе со смешанной задачей с условиями (2) и закрепленными концами ($u(0,t) = u(1,t) = 0$) исчерпывают весь класс смешанных задач для волнового уравнения с начальными условиями (2), для которых оператор соответствующей спектральной задачи в методе Фурье имеет регулярные краевые условия. В случае краевых условий $u(0,t) = u(1,t) = 0$, начальных условий (2) и вещественной $q(x)$ классическое решение смешанной задачи при минимальных требованиях на $\psi(x)$ получено в [3]. Для комплекснозначной $q(x)$ оно может быть получено резольвентным методом, приведенном в настоящей статье. Классические решения смешанных задач для волнового уравнения с начальными условиями (1) с краевыми условиями (3), (4) или $u(0,t) = u(l,t) = 0$ при минимальных требованиях на $\varphi(x)$ и комплекснозначной

$q(x)$ получены в стаьте "Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения"авторов: Хромов А. П.,Корнев В.В. 2015 Изв. Сарат. Ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика.

Исследование смешанных задач с начальными условиями (2) наталкивается на дополнительные трудности, некоторые из которых преодолеваются представлением $\psi(x)$ в виде суммы двух функций, одна из которых обращается в ноль вместе со своей производной в точках 0 и 1, а другая принадлежит области определения оператора, определяющего спектральную задачу в методе Фурье.

В данной работе методом контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей, соответствующей смешанной задаче для волнового уравнения с комплексным потенциалом, дается обоснование метода Фурье двух смешанных задач с нулевой начальной функцией и ненулевой начальной скоростью. Краевые условия таковы, что эти две задачи вместе со смешанной задачей с закрепленными концами исчерпывают весь класс смешанных задач с указанными начальными условиями, для которых оператор соответствующей спектральной задачи в методе Фурье имеет регулярные краевые условия. В отличие от работы В. А. Чернятина, предложенный метод не использует уточненной асимптотики собственных значений и никакой информации о собственных функциях. На начальные данные рассматриваемых задач накладываются минимальные требования. Существенно используется прием А. Н. Крылова ускорения сходимости рядов Фурье.

1. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \tag{5}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \tag{6}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{7}$$

где $q(x) \in C[0,1]$ - комплекснозначная функция, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - комплексные числа. Естественные минимальные требования для классического решения здесь такие: $\psi(x) \in C^1[0,1]$ комплекснозначная, причем

$$\psi'(0) + \alpha_1\psi(0) + \beta_1\psi(1) = 0, \psi'(1) + \alpha_2\psi(0) + \beta_2\psi(1) = 0. \tag{8}$$

Задача (5)-(6) с условиями (1) рассмотрена в [5].

Для формирования эталонной смешанной задачи (см. [7]) мы привлекаем оператор $L_0 : L_0 y = -y''(x), y'(0) = y'(1) = 0$. Отметим, что оператор L_0 самосопряженный, его собственными значениями являются (см. [8, с. 365]) числа $\lambda_n^0 = n^2\pi^2, n = 0, 1, ...$, а соответствующими ортонормированными собственными функциями:

$\varphi_0(x) = 1, \varphi_n(x) = \sqrt{2}\cos n\pi x (n = 1, 2, ...)$.

1.1. Преобразование формального решения

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x),$$

$$U_1(y) = y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0, U_2(y) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0.$$

Теорема 1. Собственные значения $\lambda_n = \rho_n^2 (\lambda = \rho^2, Re\rho \geq 0)$ оператора L при достаточно больших n простые и имеют асимптотику $\rho n = n\pi + \epsilon_n$, где $n = n_0, n_0 + 1, ..., \epsilon_n = O(1/n)$.

Обозначим через $\tilde{\gamma}_n$окружности $\tilde{\gamma}_n = \rho||\rho n\pi| = \delta, \delta > 0$ достаточно мало, и через γ_n - образ $\tilde{\gamma}_n$ в λ-плоскости. Пусть $R_\lambda = (L?\lambda E)^{?1}$, где E - единичный оператор, λ - спектральный параметр, есть резольвента оператора L. Формальное решение задачи (5)(7) по методу Фурье представим в виде (см. [10, 11])

$$u(x,t) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}(R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda$$

где $\gamma_r = \{\lambda||\lambda| = r\}, r > 0$ фиксировано и таково, что внутри γ_r находятся все собственные значения оператора L, не попавшие внутрь γ_n при $n \geq n_0$, контуры γ_r и γ_{n_0} не пересекаются. Отметим, что теперь в формальном решении не фигурируют явно ни собственные значения, ни собственные функции.

Выполним теперь преобразования ряда (9) с использованием эталонной зада

Лемма 1. Имеет место представление

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x), \tag{10}$$

где $\psi_1(x) \in C^1[0,1], \psi_1(0) = \psi(1) = \psi_1'(0) = \psi_1'(1) = 0, \psi_2(x) \in C^2[0,1], \psi_2(x) \in D_L$ (область определения оператора L).

Доказательство. Имеем $\psi(x) = (\psi(x) - \psi_2(x)) + \psi_2(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$,
где $\psi_2(x) \in C^2[0,1]$ и удовлетворяет условиям $\psi_2^j(0) = \psi^j(0),\ \ \psi_2^j(1) = \psi^j(1)\ \ (j = 0,1)$ (в качестве $\psi_2(x)$ можно взять, например, многочлен третьего порядка, удовлетворяющий этим условиям). Поскольку $\psi(x)$ удовлетворяет условиям (8), то этим условиям удовлетворяет и $\psi_2(x)$ и, следовательно, $\psi_2(x) \in D_L$.

Лемма 2. Пусть μ_0- фиксированное число, не являющееся собственным значением оператора L и γ - один из контуров γ_r, γ_n при $n \geq n_0$ (μ_0 вне γ). Тогда

$$\int\limits_\gamma (R_\lambda\psi_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda = \int\limits_\gamma \frac{1}{\lambda - \mu_0}(R_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

где $g = (L - \mu_0 E)\psi_2$.

Доказательство аналогично приведенному в [5, лемма 1].

Теорема 2. Формальное решение задачи (5)-(7) представимо в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda^0\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$u_1(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r}+\sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_1 R_\lambda^0\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$u_2(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r}+\sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$R_\lambda^0=(L_0-\lambda E)^{-1}$- резольвента оператора L_0.

Доказательство. По лемме 1 имеем:

$$u(x,t)=)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r}+\sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r}+\sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda.$$

Отсюда, применяя лемму 2 ко второму слагаемому и выполняя очевидные преобразования с первым, получаем (13).

Замечание. Функция $u_0(x,t)$ есть формальное решение эталонной задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\psi_1(x),\quad u_x(0,t)=u_x(1,t)=0. \tag{14}$$

1.2. Вспомогательные утверждения

Обозначим через $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ решения уравнения $y''q(x)y+\rho^2 y=0$ с начальными условиями $z_1(0,\rho)=1$, $z_1'(0,\rho)=0$, $z_2(0,\rho)=0$, $z_2'(0,\rho)=1$. Тогда $z_j(x,\rho)$являются целыми функциями по ρ и даже по λ, где $\lambda=\rho^2$.

Теорема 3. Для R_λ и R_λ^0 имеют место формулы

$$R_\lambda f=v_1(x,\rho)(f,z_1)+v_2(x,\rho)(f,z_2)+M_\rho f,$$

$$R_\lambda f=v_1^0(x,\rho)(f,z_1^0)+v_2^0(x,\rho)(f,z_2^0)+M_\rho^0 f \tag{15}$$

где

$$v_j(x,\rho)=\frac{(-1)^j}{\triangle(\rho)}\{[-\beta_1 z_{3-j}(1,\rho)U_2(z_2)+(z_{3-j}')(1,\rho)+\beta_2 z_{3-j}(1,\rho))U_1(z_2)]z_1(x,\rho)+$$

$$+[\beta_1 z_{3-j}(1,\rho)U_2(z_1)-(z_{3-j}')(1,\rho)+\beta_2 z_{3-j}(1,\rho))U_1(z_1)]z_2(x,\rho)\}(j=1,2),$$

$$\triangle(\rho)=U_1(z_1)U_2(z_2)-U_1(z_2)U_2(z_1),\quad (f,z)=\int\limits_0^1 f(\xi)z(\xi)d\xi,$$

$$v_1^0(x,\rho)=\frac{-\cos\rho\cos\rho x}{\rho\sin\rho},\quad v_2^0(x,\rho)=-\cos\rho x,$$

$$M_\rho f = \int\limits_0^x \begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \\ z_1(\xi,\rho) & z_2(\xi,\rho) \end{vmatrix} f(\xi)d\xi,$$

$$M_\rho^0 f = \int\limits_0^x \begin{vmatrix} z_1^0(x,\rho) & z_2^0(x,\rho) \\ z_1^0(\xi,\rho) & z_2^0(\xi,\rho) \end{vmatrix} f(\xi)d\xi, \;\; z_1^0(x,\rho) = \cos\rho x, \;\; z_2^0(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho}.$$

Этот результат, как и следующая лемма, доказаны в [5, теоремы 3, 4, лемма 2].

Лемма 3. При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место асимптотические формулы:

$$v_1^{(j)}(x,\rho) = v_1^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-2}), \;\; v_2^{(j)}(x,\rho) = v_2^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-1}), \;\; j = 0,1,2,$$

Где $v^{(j)}(x,\rho) = \frac{d^j}{dx^j}v(x,\rho)$ и оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0,1]$.

Теорема 4. Для $z_j(x,\rho), j = 1,2,$имеют место формулы

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + \int\limits_0^x K_1(x,\xi)\cos\rho\xi d\xi,$$

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int\limits_0^x K_2(x,\xi)\frac{\sin\rho\xi}{\rho}d\xi, \tag{17}$$

где $K_j(x,\xi)$ непрерывно дифференцируемы по x и ξ, причем$K_2(x,0) = 0$.

Замечание. Формулы (16), (17) хорошо известны как формулы операторов преобразования (см. [12, с. 17, 23]).

Лемма 4. Имеют место формулы

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\xi)\cos\rho\xi q(\xi)d\xi + \frac{1}{\rho^2}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\xi)F_1(\xi,\rho)d\xi, \tag{18}$$

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\xi)\sin\rho\xi q(\xi)d\xi + \frac{1}{\rho^3}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\xi)F_2(\xi,\rho)d\xi, \tag{19}$$

где

$$F_1(\xi,\rho) = q(\xi)\left[\sin\rho\xi K_1(\xi,\xi) + \int\limits_0^\xi \sin\rho\tau K'_{1_\tau}(\xi,\tau)d\tau\right],$$

$$F_2(\xi,\rho) = q(\xi)\left[-\cos\rho\xi K_2(\xi,\xi) + \int\limits_0^\xi \cos\rho\tau K'_{2_\tau}(\xi,\tau)d\tau\right].$$

Доказательство. Докажем формулу (18). Используя метод вариаций произвольных постоянных и формулу (16), получим:

$$z_1(x,\rho)=\cos\rho x+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\xi)q(\xi)z_1(\xi,\rho)d\xi=\cos\rho x+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\xi)q(\xi)[\cos\rho\xi+$$

$$\int\limits_0^\xi K_1(\xi,\tau)\cos\rho\tau d\tau]d\xi.$$

Отсюда следует (18). Формула (19) получается аналогично, но с использованием формулы (17).

Лемма 5. Имеют место формулы

$$\left(\psi_1(x),\int\limits_0^x \sin\rho(x-\xi)\cos\rho\xi q(\xi)d\xi\right)=\frac{1}{\rho}(p_1(x),\cos\rho x), \tag{20}$$

$$\left(\psi_1(x),\int\limits_0^x \sin\rho(x-\xi)\sin\rho\xi q(\xi)d\xi\right)=\frac{1}{\rho}(p_1(x),\sin\rho x), \tag{21}$$

где

$$\rho_j=\rho_{j1}(x)+\rho_{j2}(x)+\rho_{j3}(x),\qquad j=1,2,\qquad \rho_{11}=-q(x)\int\limits_x^1\psi_1\xi)d\xi,$$

$$\rho_{12}(x)=\frac{1}{2}\psi_1'(x)\int\limits_0^x q(\xi)d\xi,\qquad \rho_{13}(x)=\frac{1}{4}\int\limits_x^1\psi_1'(\xi)\left[q(\frac{\xi-x}{2})+q(\frac{\xi+x}{2})\right]d\xi,$$

$$\rho_{21}(x)=\rho_{11}(x),\quad \rho_{22}(x)=\rho_{12}(x),\quad \rho_{23}(x)=\frac{1}{4}\int\limits_x^1\psi_1'(\xi)\left[q(\frac{\xi+x}{2})-q(\frac{\xi-x}{2})\right]d\xi.$$

Лемма 6. При $\rho\in\tilde{\gamma}_n$ имеют место оценки

$$\left(\psi_1(x),\int\limits_0^x \sin\rho(x-\xi)F_j(\xi,\rho)d\xi\right)=O\left(\frac{1}{\rho}\right),\qquad j=1,2,$$

где $F_j(\xi,\rho)$ из леммы 4.

Для доказательства следует изменить порядок интегрирования левой части, провести интегрирование по частям во внутреннем интеграле и учесть, что $F_j(\xi,\rho)=O(1)$ равномерно по $\xi\in[0,1]$. Из лемм 4-6 получаем следующий результат.

Лемма 7. Если $\rho=\pi n+\mu$ и $\mu\in\tilde{\gamma}_0$, то

$$(\psi_1, z_1-z_1^0)=\frac{1}{(n\pi+\mu)^2}[p_1(\xi)\cos\mu\xi,\cos n\pi\xi)-(p_1(\xi)\sin\mu\xi,\sin n\pi\xi)]+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$(\psi_1, z_2-z_2^0)=\frac{1}{(n\pi+\mu)^3}[(p_2(\xi)\cos\mu,\sin n\pi\xi)+(p_2(\xi)\sin\mu\xi,\cos n\pi\xi)]+O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

где оценки $O(\cdot)$ равномерны по $\mu\in\tilde{\gamma}_0$.

Лемма 8. Если $\rho=n\pi+\mu$ и $\mu\in\tilde{\gamma}_0$, то

$$(\psi_1,z_1)=\frac{1}{n\pi+\mu}[(p_3(\xi)\cos\mu\xi,\sin n\pi\xi)-(p_3(\xi)\sin\mu\xi,\cos n\pi\xi)], \tag{24}$$

$$(\psi_1,z_2)=\frac{1}{(n\pi+\mu)^2}[(p_4(\xi)\cos\mu\xi,\cos n\pi\xi)-(p_4(\xi)\sin\mu\xi,\sin n\pi\xi)], \tag{25}$$

где

$$p_3(\xi)=-\psi_1'(\xi)+\psi_1(\xi)K_1(\xi,\xi)-\int\limits_{\xi}^{1}\psi_1(\tau)K'_{1_\xi}(\tau,\xi)d\tau,$$

$$p_4(\xi)=\psi_1'(\xi)-\psi_1(\xi)K_2(\xi,\xi)+\int\limits_{\xi}^{1}\psi_1(\tau)K'_{2_\xi}(\tau,\xi)d\tau.$$

Лемма 10. Обозначим через $\theta(x)$ функцию $\cos x$ или $\sin x$. Пусть $f(x)\in L_2[0,1]$ и $f(x,\mu)=f(x)\theta(\mu x)$, где $\mu\in\tilde{\gamma}_0$ и $\beta_n(\mu)=(f(x,\mu),\theta(n\pi x))$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n}|\beta_n(\mu)|\le C\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}},$$

где постоянная C не зависит от n_1,n_2 и $\mu\in\tilde{\gamma}_0$.

1.3. Исследование $u_0(x,t)$

Теорема 5. Функция $u_0(x,t)$ из (12) есть классическое решение эталонной задачи (14).

1.4. Исследование $u_1(x,t)$

По теореме 3, учитывая, что $M_\rho f$ и $M_\rho^0 f$ являются целыми функциями по λ, имеем:

$$-\sum_{n\ge n_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}(R_\lambda\psi_1-R_\lambda^0\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda=\sum_{n\ge n_0}a_n(x,t),$$

где

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} 2\sin\rho t[v_1(x,\rho)(\psi_1,z_1) + v_2(x,\rho)(\psi_1,z_2) -$$
$$-v_1^0(x,\rho)(\psi_1,z_1^0) - v_1^0(x,\rho)(\psi_1,z_2^0)]d\rho. \tag{27}$$

Лемма 11. Ряды $\sum a_{n,x^j}^{(j)}(x,t)$ и $\sum a_{n,t^j}^{(j)}(x,t)(j=0,1,2)$ сходятся абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$ и $t\in[-T,T]$ при любом $T>0$.

Лемма 12. Ряд $u_1(x,t)$ допускает почленное дифференцирование дважды по x и t при $x\in[0,1]$ и $t\in(-\infty,\infty)$.

1.5. Исследование $u_2(x,t)$

По теореме 3, учитывая, что $M_\rho f$ есть целая по λ, имеем:

$$-\sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda = \sum_{n\geq n_0} b_n(x,t),$$

где

$$b_n(x,t) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{2\sin\rho t}{\rho^2-\mu_0}[v_1(x,\rho)(g,z_1) + v_(x,\rho)(g,z_2)]d\rho. \tag{30}$$

Лемма 13. Ряды $\sum b_{n,x^j}^{(j)}(x,t)$ и $\sum b_{n,t^j}^{(j)}(x,t), j=0,1,2,$сходятся абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$ и $t\in[-T,T]$ при любом $T>0$.

Лемма 14. Ряд $u_2(x,t)$ допускает почленное дифференцирование дважды по x и t при $x\in[0,1]$ и $t\in(-\infty,\infty)$.

1.6. Классическое решение задачи (5)-(7)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \tag{5}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \tag{6}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \quad x\in[0,1], \quad t\in(-\infty,\infty), \tag{7}$$

Теорема 6. Формальное решение $u(x,t)$ задачи (5)-(7) является классическим решением при $\psi(x)\in C^1[0,1]$и выполнении условия

$$\psi'(0) + \alpha_1\psi(0) + \beta_1\psi(1) = 0, \psi'(1) + \alpha_2\psi(0) + \beta_2\psi(1) = 0. \tag{8}$$

.