Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной информатики
наименование кафедры

СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТРЕСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
код и наименование направления

Механико-математического факультета
наименование факультета

Демченко Максима Валерьевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н — В.А. Халова
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Зав. кафедрой:
д.ф.-м.н., профессор — А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Саратов 2017 год

ВВЕДЕНИЕ

В пространстве $L_2[0,1]$ рассматривается оператор вида:

$$\begin{aligned} Af(x) =& \alpha_1 \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt + \alpha_2 \int\limits_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt + \\ &+ \sum_{k=1}^m (f, v_k) g_k(x), \quad x \in [0,1], \end{aligned} \tag{1}$$

где $(f, v_k) = \int\limits_0^1 f(t) v_k(t)\,dt$, $v_k(t) \in C^n[0,1]$, $g_k(x) \in C^n[0,1]$, системы функций $\{g_k^{(n)}(x)\}_1^m$ и $\{v_k^{(n)}(t)\}_1^m$ линейно независимые, $\beta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$.

Спектральный анализ интегральных операторов играет фундаментальную роль в различных разделах математики и имеет много приложений. Так, например, данная теория традиционно применяется в граничных задачах математической физики, квантовой механики. в обратной задаче спектрального анализа и т.п. Исследования в этой области предполагают изучения вопросов обращения указанных операторов, асимптотического представления резольвенты при больших значениях спектрального параметра, расположение спектра, суммируемости разложений по собственным и прмсоединенным функциям (с.п.ф.), равносходимости разложений по с.п.ф и по известным системам функций, базисности, полноты системы из с.п.ф и т.п.

Исседование суммируемости по Риссу разложений по с.п.ф. интегральных операторов занимались А.П. Хромов, А.П. Гуревич и А.М. Седлецкий и другие. В работах [1, 2] они рассматривали средние Рисса вида:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda \tag{2}$$

Здесь $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ — резольвента Фредгольма оператора А, а функция $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \leq r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$;

б) существует такая константа $C > 0$, что $|g(\lambda, r)| \leq C$ при всех $r > 0$ и

$|\lambda| \le r$;

в) при фиксированном λ $\lim\limits_{r\to\infty} g(\lambda, r) = 1$.

г) существуют положительные β, β_1, h такие, что:

$$g(re^{i\varphi}, r) = \begin{cases} O\Big(\Big|\varphi\Big|^{\beta}\Big) & |\varphi| \le h, n = 4n_0, \\ O\Big(\Big|\varphi - \pi\Big|^{\beta}\Big) & |\varphi - \pi| \le h, n = 4n_0 + 2, \\ O\Big(\Big|\varphi - \frac{\pi}{2}\Big|^{\beta}\Big) & |\varphi - \frac{\pi}{2}| \le h, n - , \\ O\Big(\Big|\varphi + \frac{\pi}{2}\Big|^{\beta_1}\Big) & |\varphi + \frac{\pi}{2}| \le h, n - \end{cases} \tag{3}$$

В.А. Халова в [3] продолжила эти исследования и доказала сходимость средних Рисса для оператора (1) в случае четного n. А.Н. Луконина в своей диссертации [4] продолжила эти исследование, для похожего класса интегральных операторов.

В данной работе находятся необходимые и достаточные условия на $f(x)$, обеспечивающие равномерную сходимость к ней на всем отрезке [0,1] средние вида (2). Будем рассматривать оператор вида (1) в случае нечетного n, для простоты, полагаем что $n = 3$. Тогда оператор (1) примет вид:

$$\begin{aligned} Af(x) =& \alpha \int\limits_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f(t)\,dt + \int\limits_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^2}{2} f(t)\,dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) g_k(x), \quad x \in [0,1], \end{aligned} \tag{4}$$

где $(f, v_k) = \int\limits_0^1 f(t) v_k(t)\,dt$, $v_k(t) \in C^3[0,1]$, $g_k(x) \in C^3[0,1]$, системы функций $\{g_k'''(x)\}_1^m$ и $\{v_k'''(t)\}_1^m$ линейно независимые, $\alpha^2 \ne 1$. Также можно отметить, что условия с а) по в) на функцию $g(\lambda, r)$, имеют такой же вид как в (3) а условие г) примет вид:

существуют положительные числа h_j, β_j, такие, что при $\left|\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}\right| \le h_j$ имеет место оценка

$$g(re^{i\varphi}, r) = O\Big(\Big|\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}\Big|^{\beta_j}\Big)$$

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованных источников.

Одним из необходимых условий для доказательства суммируемости по Риссу является условие существования обратного оператора [5], вообще говоря, в общем случае трудно проверяемые. Поэтому вводятся в рассмотрение следующие операторы:

$$L_0 : \ Ly(x), \quad \mathrm{U}_j(y) = \sum_{k=0}^{\sigma_j} [a_{jk} y^{(k)}(0) + b_{jk} y^{(k)}(1)] = 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$L_1 : \ Ly(x), \quad \mathrm{V}_j(y) = \mathrm{U}_j(y) - (y, \varphi_j) = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

где Ly — главная часть оператора A^{-1}.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1 рассматривается резольвента $R_{0,\lambda} = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ простейшего диффереинциально-разностного оператора L_0, а так же изучаются её свойства. Вводится следующая вспомогательная краевая задача:

$$v^{'''}(x) - \lambda \mathcal{D} v(x) = \mathcal{B} F(x), \tag{5}$$

$$\mathbf{U}_j(v) = \sum_{k=0}^{\sigma_j} [P_{jk} v^{(k)}(0) + Q_{jk} v^{(k)}(1)] = 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{6}$$

где

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \alpha+1 & \alpha+1 \\ \alpha-1 & 1-\alpha \end{pmatrix},$$

$$P_{jk} = \begin{pmatrix} p^1_{jk} & p^2_{jk} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (-1)^k p^1_{jk} & (-1)^{k+1} p^2_{jk} \end{pmatrix}$$

$$p^1_{jk} = a_{jk} + (-1)^k b_{jk}, \qquad p^2_{jk} = a_{jk} - (-1)^k b_{jk}.$$

Формула для резольвенты $R_{0,\lambda}$ представляет собой линейную комбинацию компонент решения вспомогательной краевой задачи (5)—(6) в пространстве вектор-функций.

Теорема (1). *Если λ таково, что $\Delta_0^{-1}(\lambda)$ существует, то*

$$R_{0,\lambda} f(x) = v_1(x,\lambda) + v_2(x,\lambda),$$

где $v(x,\lambda) = (v_1(x,\lambda), v_2(x,\lambda))^T$ – решение краевой задачи (5)—(6),
$\Delta_0(\lambda) = (\mathbf{U}_j(V_k)), \quad j = 1,2,3, \quad k = 1,2,3,$
V_k — фундаментальная система решений уравнения (5) при $F(x) = 0$

В главе 2 устанавливаются оценки для $R_{0,\lambda}$ в некоторой области S_{δ_0} при больших значениях $|\lambda|$.
$\lambda = \rho^3, {\omega_j}^3 = 1, d^3 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}, \tilde{\omega}_j : \omega_j, d\omega_j$
$\operatorname{Re} \rho\tilde{\omega}_1 \geq \operatorname{Re} \rho\tilde{\omega}_2 \geq \operatorname{Re} \rho\tilde{\omega}_3 \geq 0 \geq \operatorname{Re} \rho\tilde{\omega}_4 \geq \operatorname{Re} \rho\tilde{\omega}_5 \geq \operatorname{Re} \rho\tilde{\omega}_6$
S_{δ_0} — область получающая удалением всех нулей функции $\Psi(\rho) = a_0 +$

$a_1 e^{-2\rho\tilde{\omega}_n} + o(1)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_0.

Теорема (2)**.** *В области S_{δ_0} при больших значениях $|\rho|$ имеют место следующие оценки:*

$$\|D^s R_{0,\lambda} f\|_\infty = O\Big(|\rho|^{-2+s}\Big)\|f\|_1,$$
$$\|D^s R_{0,\lambda} f\|_\infty = O\Big(|\rho|^{-2+s}\psi(\rho)\Big)\|f\|_\infty,$$
$$\|D^s R_{0,\lambda} f\|_1 = O\Big(|\rho|^{-2+s}\psi(\rho)\Big)\|f\|_1,$$
$$\|D^s R_{0,\lambda} \chi\|_\infty = O\Big(|\rho|^{-3+s}\Big),$$

где $s = 0, 1, 2$, $\psi(\rho) = \sum\limits_{j=1}^{3} \frac{1-e^{-\operatorname{Re}\rho\tilde{\omega}_j}}{\operatorname{Re}\rho\tilde{\omega}_j}$ $\chi(x)$ — характеристическая функция отрезка $[\eta_0, \eta_1] \subset (0, 1)$.

Также в этой главе рассматривается резольвента $R_{1,\lambda} = (L_1 - \lambda E)^{-1}$ оператора

$$L_1 : \ Ly(x), \quad \mathrm{V}_j(y) = \mathrm{U}_j(y) - (y, \varphi_j) = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

и устанавливается связь с резольвентой $R_{0,\lambda}$. Вводится следующая краевая задача:

$$u'''(x) - \lambda \mathcal{D} u(x) = \mathcal{B} F(x), \tag{7}$$

$$\mathbf{V}_j(u) = \mathbf{U}_j(u) - \int\limits_0^1 \Phi_j(t) u(t)\, dt = 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{8}$$

где $\Phi_j(t) = \begin{pmatrix} \varphi_j(t) & \varphi_j(t) \\ \varphi_j(1-t) & -\varphi_j(1-t) \end{pmatrix}$; $\mathbf{U}_j(u)$ — краевое условие (6).

Лемма (1)**.** *Если λ таково, что решение $u(x) = u(x, \lambda) = v(x, \lambda) + (V_1(x, \lambda), V_2(x, \lambda), V_3(x, \lambda))\Delta_1^{-1}(\lambda)(\Phi, v)$ краевой задачи (5) — (6) существует, то имеет место формула*

$$R_{1,\lambda} f(x) = u_1(x, \lambda) + u_2(x, \lambda),$$

где $(u_1(x,\lambda),\ u_2(x,\lambda))$ *— компоненты вектора* $u(x,\lambda)$, $\Delta_1(\lambda) = \mathbf{V}_j(V_k)$, $V_k(x,\lambda)$ $(k = 1,2,3)$.

Далее для резольвенты $R_{1,\lambda}$ в области S_{δ_0} получаются оценки, аналогичные оценкам резольвенты $R_{0,\lambda}$.

Теорема (3). *В области* S_{δ_0} *при больших значениях* $|\rho|$ *имеют место следующие оценки:*

$$\|D^s R_{1,\lambda} f\|_\infty = O\Big(|\rho|^{-2+s}\Big)\|f\|_1,$$
$$\|D^s R_{1,\lambda} f\|_\infty = O\Big(|\rho|^{-2+s}\psi(\rho)\Big)\|f\|_\infty,$$
$$\|D^s R_{1,\lambda} f\|_1 = O\Big(|\rho|^{-2+s}\psi(\rho)\Big)\|f\|_1,$$
$$\|D^s R_{1,\lambda} \chi\|_\infty = O\Big(|\rho|^{-3+s}\Big),$$

где $s = 0,1,2$, $\psi(\rho) = \sum\limits_{j=1}^{3} \frac{1-e^{-\operatorname{Re}\rho\tilde{\omega}_j}}{\operatorname{Re}\rho\tilde{\omega}_j}$ $\chi(x)$ *— характеристическая функция отрезка* $[\eta_0,\eta_1] \subset (0,1)$.

В главе 3 рассматривается резольвента Фредгольма $R_{2,\lambda} = (E-\lambda A)^{-1}A$ оператора A. Доказывается существование и единственность решения уравнения для $R_{2,\lambda}$, и получены оценки для остаточного члена в формуле, связывающей ее с резольвентой $R_{1,\lambda}$.

Теорема (4). *Для любой* $f(x) \in L[0,1]$ *имеет место*

$$\lim_{r\to\infty} \|\Omega_{1,r} f\|_{[\delta,1-\delta]} = 0,$$

где

$$\Omega_{1,r} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_{2,\lambda} - R_{1,\lambda}) f(x)\, d\lambda$$

и r *таково, что* $\{\rho:\ |\rho|^3 = r,\ 0 \le \arg\rho \le 2\pi/3\} \subset S_{\delta_0}$, $0 < \delta \le 1/2$.

Затем устанавливается равносходимость спектральных разложений по с.п.ф. операторов A и L_0.

Теорема (5). *Для любой* $f(x) \in L[0,1]$ *имеет место*

$$\lim_{r\to\infty} \|\Omega_{2,r} f\|_{[\delta,1-\delta]} = 0,$$

где

$$\Omega_{2,r} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_{2,\lambda} - R_{0,\lambda}) f(x)\, d\lambda$$

и r *таково, что* $\{\rho : \ |\rho|^3 = r, \ 0 \le \arg\rho \le 2\pi/3\} \subset S_{\delta_0}$, $0 < \delta \le 1/2$.

В главе 4 рассматриваются средние Рисса вида:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda,$$

функция $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$;

б) существует такая константа $C > 0$, что $|g(\lambda, r)| \le C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$;

в) при фиксированном λ $\lim\limits_{r\to\infty} g(\lambda, r) = 1$.

г)для каждого сектора $\gamma_{j-1} \le \arg\rho \le \gamma_j$ $(j = 1, \ldots, \ell_0)$ области S_{δ_0} существуют положительные числа h_j, β_j, такие, что при $\left|\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}\right| \le h_j$ имеет место оценка:

$$g(re^{i\varphi}, r) = O\left(\left|\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}\right|^{\beta_j}\right)$$

где $\varphi = \arg\rho$, $\alpha = \arg\tilde{\omega}_n$ (оценки равномерны по r);

И доказывается оснавная теорема — теорема о сходимости средних Рисса для оператора A.

Теорема (6). *Для того чтобы выполнялось соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \Omega_r(f) = \lim_{r\to\infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f(x)\, d\lambda \right\|_\infty = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in D^0$,

где $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ *— резольвента Фредгольма оператора* A,

D^0 – *множество всех непрерывных на* $[0,1]$ *функций, удовлетворяющих условиям* $V_j(y) = 0,\ j = \overline{\kappa+1, 3}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цели и задачи, поставленные в данной работе, выполнены. В частности были найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых средние Рисса сходятся к функции $f(x)$. При восстановлении доказательств были использованы методы работ [1, 3, 5, 8–16].