Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики

Смешанная задача для волнового уравнения

с периодическими краевыми условиями

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Чеканова Сергея Александровича

Научный руководитель
зав.каф.,д.ф. – м.н.,профессор ________________ А. П. Хромов

Зав. кафедрой
зав.каф.,д.ф. – м.н.,профессор ________________ А. П. Хромов

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Метод Фурье является одним из важнейших математических методов. Академик В.А.Стеклов впервые дал строгое обоснование метода Фурье, которое опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз.

Метод Фурье получил широкое распространение, было проведено большое количество исследований и достигнуты значительные успехи в это области И.Г.Петровским, В.И.Смирновым, О.А.Ладыженской, В.А.Ильиным, В.А.Чернятиным.

Недостатком такого подхода является то, что он требует завышения гладкости начальных данных. Выход из этого положения намечен А.Н.Крыловым. Суть его приема состоит в том, что изучаемый вопрос о дифференцировании ряда решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется и тем самым в этом случае не надо прибегать к почленному дифференцированию, а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать.

В.А. Чернятин, воспользовавшись приемом А.Н.Крылова с применением асимптотик для собственных значений и собственных функций, успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, а в ряде случаев эти условия стали минимально возможными.

Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А.Н. Крылова, В.А. Чернятина, есть качественно новый шаг, позволяющий с исчерпывающей полнотой исследовать смешанные задачи методом Фурье и ставящий много новых важных вопросов и в теории функций.

В данной работе рассматривается дальнейшее развитие метода А.Н.Крылова и В.А.Чернятина путем привлечения метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье.

Цель работы получить классическое решение для волнового уравнения с периодическими краевыми условиями при минимальных условиях на исходные данные, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях.

Данная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованных источников. В первой главе дается постановка задачи и выводится формула для резольвенты спектрального оператора, соответствующего этой задачи по методу Фурье. Во второй главе приводятся леммы, необходимые для доказательства асимптотики резольвенты. В третьей главе рассматривается оператор преобразования и формула Римана, необходимая для данного оператора. В четвертой главе ряд формального решения по методу Фурье разбивается на три ряда и каждый исследуется в отдельности. В пятой главе доказывается основная формула для классического решения задачи.

Рассматривается задача следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t),$$

$$u(0,t) = u(1,t) \quad u_x(1,t) = u_x(1,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Считаем что $q(x) \in C[0,1]$ - комплексная функция. Естественные минимальные требования для классического решения данной задачи следующие:

$$\varphi(x) \in C^2[0,1], \quad \varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0.$$

Кроме того, в силу дифференциального уравнения имеем:

$$\varphi''(0) - \varphi''(1) - (q(0) - q(1))\varphi(0) = 0.$$

При применение метода Фурье здесь возникают трудности из-за возможных кратности собственных значений соответствующей спектральной задачи.
С этими трудностями успешно справиться позволят резольвентный подход.

В **главе 1** рассматривается спектральная задача для оператора L, асимптотика и доказывается теорема для резольвенты:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1), y'(0) = y'(1).$$

Терема 1. Для резольвенты R_λ оператора L имеет место формула

$$R_\lambda = -\frac{z_1(x,\rho)}{\triangle(\rho)}\begin{vmatrix} U_1(M_\rho f) & u_(12)(\rho) \\ U_2(M_\rho f) & u_(22)(\rho) \end{vmatrix} - \frac{z_2(x,\rho)}{\triangle(\rho)}\begin{vmatrix} u_(11)(\rho) & U_1(M_\rho f) \\ u_(21)(\rho) & U_2(M_\rho f) \end{vmatrix} + (M_\rho f)(x),$$

где

$$U_1(y) = y(0) - y(1), U_2(y) = y'(0) - y'(1), u_{ij}(\rho) = U_1(z_j),$$

$$\triangle(\rho) = det(u_{ij}(\rho))^2_{i,j=1}, \lambda = \rho^2, Re\rho \geq 0.$$

Доказательство Если $y = R_\lambda f$, то y удовлетворяет уравнению

$$y'' - q(x)y + \lambda y = -f$$

и условиям $y(0) = y(1)$ $y'(0) = y'(1)$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = c_1 z_1(x,\rho) + c_2 z_2 + (M_\rho f)(x),$$

где c_1 c_2 – произвольные постоянные. Подчиняя общее решение краевым условиям, получаем

$$R_\lambda f = -\frac{z_2(x,\rho)}{z_2(1,\rho)}\int\limits_0^1 M(1,t,\rho)f(t)dt + \int\limits_0^x M(x,t,\rho)f(t)dt$$

Следствие. Имеет место формула

$$R_\lambda f = w_1(x,\rho)(f,z_1) + w_2(x,\rho)(f,z_2) + (M_\rho f)(x),$$

где

$$w_1(x,\rho) = \frac{z_1(x,\rho)v_{11}(\rho) + z_2(x,\rho)v_{21}(\rho)}{\triangle(\rho)}$$

$$w_2(x,\rho) = \frac{z_1(x,\rho)v_{12}(\rho) + z_2(x,\rho)v_{22}(\rho)}{\triangle(\rho)}$$

$$v_{11}(\rho) = -u_{12}(\rho)z_2'(1,\rho) + u_{22}(\rho)z_2(1,\rho),$$

$$v_{12}(\rho) = -u_{22}(\rho)z_1(1,\rho) + u_{12}(\rho)z_1'(1,\rho),$$

$$v_{21}(\rho) = -u_{21}(\rho)z_2(1,\rho) + u_{11}(\rho)z_2'(1,\rho),$$

$$v_{22}(\rho) = -u_{11}(\rho)z_2'(1,\rho) + u_{21}(\rho)z_1(1,\rho),$$

которая следует из формулы для резольвенты R_λ оператора L если воспользоваться явным видом $M_\rho f$. Комплексное число λ является собственным значением опертатора L тогда и только тогда, когда ρ является нулем
функции $\triangle(\rho)$

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + \int_0^x K_1(x,t)\cos\rho t dt,$$

где $K_1(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t. Получаем что нули функции $\triangle(\rho)$ достаточно большие по модулю, находятся в полосе $|Im\rho| \leq h$, где $h > 0$ - любое фиксированное число. Далее получаем,что для $\triangle(\rho)$ полосе $|Im\rho| \leq h$, имеет место асимптотическая формула:

$$\triangle(\rho) = 2(1-\cos\rho) + O(\frac{1}{\rho})$$

Теорема 2. Нули ρ_n функции $\triangle(\rho)$, достаточно большие по модулю, образуют две серии с асимптотикой

$$\rho_n' = 2\pi n + \varepsilon_n', p_n'' = 2\pi n + \varepsilon_n''(n = n_0, n_0+1, ...),$$

где ε_n' и ε_n'' стремится к нулю при $n \to \infty$. В случае $\varepsilon_n' \neq \varepsilon_n''$ они простые, а в случае $\varepsilon_n' = \varepsilon_n''$ они двукратные.

В **главе 2** приводятся вспомогательные утверждения для решение задачи
Теорема 3.
В полосе $|\Im\rho| \leq h$, $h > 0$ имеют место асимптотические формулы

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + O\frac{1}{\rho}, \quad z_1'(x,\rho) = -\rho\sin\rho x + O(1),$$

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + O(\frac{1}{\rho^2}), \quad z_2'(x,\rho) = \cos\rho x + O(\frac{1}{\rho}),$$

где оценки $O(.....)$ равномерны по $x \in [0,1]$.
Будем рассматривать окружность $\gamma_n = \{\rho||\rho - 2\pi n| = \delta\}, \quad \delta > 0$. тогда из теоремы 3 следует
Лемма 1. При $\rho \in \gamma_n$ имеет место асимптотические формулы:

$$z_1^j(x,\rho) = z_1^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-1}),$$

$$z_2^j(x,\rho) = z_2^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-2}),$$

где $j = 0, 1, 2$, $z^{(j)}(x,\rho)$ есть j-я производная по x функции

$$z_k(x,\rho), z_1^0(x,\rho) = \cos\rho x, z_2^0(x,\rho) = \sin\frac{\rho x}{\rho}.$$

Лемма 2. Пусть $\triangle_0(\rho) = \left(u_{ij}^0(\rho)\right)_1^2$,где $u_{ij}^0(\rho) = U_i(z_j^0)$,при $\rho \in \gamma_n$ имеет место формула

$$\frac{1}{\triangle(\rho)} = \frac{1}{\triangle_0(\rho)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Лемма 3. При $\rho \in \gamma_n$ имеет место формула

$$(g, z_1) = (g_3(\xi)\cos\mu\xi, \cos 2\pi n\xi) - (g_3(\xi)\sin\mu\xi, \sin 2\pi n\xi),$$

$$(g, z_1 - z_1^0) = \frac{1}{2\pi n + \mu}[(g_4(\xi)\cos\mu\xi, \sin 2\pi n\xi) + (g_4(\xi) sin\mu\xi, \cos 2\pi n\xi)],$$

где

$$g_3(\xi) = g(\xi) + \int_1^\xi K_1(\tau,\xi)g(\tau)d\tau,$$

$$g_4(\xi) = g(\xi)K_1(\xi,\xi) - \int_1^\xi K_{i\xi}(\tau,\xi)g(\tau)d\tau$$

$$g(\xi) \in C[0,1].$$

Лемма 4. При $\rho \in \gamma_n$ имеет место формула

$$(g, z_2) = \frac{1}{2\pi n + \mu}[(g_5(\xi)\cos\mu\xi \sin 2\pi n\xi) + (g_5(\xi)\sin\mu\xi, \cos 2\pi n\xi)],$$

$$(g, z_2 - z_2^0) = \frac{1}{(2\pi n + \mu)^2}[(g_6(\xi)\cos\mu\xi \cos 2\pi n\xi) + (g_6(\xi)\sin\mu\xi, \sin 2\pi n\xi)],$$

где

$$g_5(\xi) = g(\xi) + \int_1^\xi K(\tau,\xi)g(\tau)d\tau,$$

$$g_6(\xi) = -g(\xi)K(\xi,\xi) + \int_1^\xi K'_\xi(\tau,\xi)g(\tau)d\tau,$$

$$g(\xi) \in C[0,1].$$

Лемма 5. При $\rho \in \gamma_n$ справедлива оценка:

$$R_\lambda f = O(\rho^{-1}||f||_1),$$

где $||f||_1 = \int_0^3 |f(t)|dt$, и оценка $O(...)$ равномерна по $x \in [0, 1]$.

Лемма 6. При $\rho \in \gamma_n$ имеют место асимптотические формулы

$$w_{1,x^j}^{(j)}(x,\rho) = w_{1,x^j}^{0(j)}(x,\rho) + O(n^{j-2}), w_{2,x^j}^{(j)}(x,\rho) = w_{2,x^j}^{0(j)}(x,\rho) + O(n^{j-1}),$$

где $j = 0, 1, 2, w_k^0(x,\rho)$ есть $w_k(x,\rho)$ для случая оператора L_0 (т.е. оператора L при $q(x) \equiv 0$). Оценки $O(...)$ равномерны по $x \in [0, 1]$ и μ, где $\mu = \rho - 2\pi n$.

Глава 3 содержит в себе теорему для оператора преобразования, и формулу Римана.

Теорема 4

Если функции $q_1(x)$ и $q_2(y)$ непрерывны, то любые дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x, y)$ задачи Коши

$$\left.\begin{array}{c} u''_x x(x,y) - q_1(x)u(x,y) = u''_y y(x,y) - q_2(y)u(x,y), \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad u'_y(x,0) = \psi(x). \end{array}\right\}$$

представимо формулой

$$u(x_0, y_0) = \frac{\varphi(x_0 + y_0) + \varphi(x_0 - y_0)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \{\psi(x)R(x,0;x_0,y_0) - \varphi(x)R'_y(x,0;x_0,y_0)\}dx.$$

где $R(x, y; x_0, y_0)$ – непрерывно дифференцируемая функция, получающаяся из решения интегрального уравнения

$$r(\xi,\eta) = 1 - \int\limits_{\xi}^{\xi_0} d\alpha \int\limits_{\eta_0}^{\eta} s(\alpha,\beta)r(\alpha,\beta)d\beta$$

по формуле

$$s(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\left\{q_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) - q_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right\}$$

$R(x, y; x_0, y_0)$–формула Римана.

Теорема 5

Решение $e_0(\lambda, x)$ уравнения $y'' - q(x)y + \lambda^2 y = 0$ при начальных данных $e_0(\lambda, 0) = 1 \qquad e_0'(\lambda, 0) = i\lambda$ представимо в виде:

$$e_0(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int\limits_{-x}^{x} K(x,t) e^{i\lambda t} dt$$

где $K(x, t)$ – непрерывная функция, выражающаяся через функцию Римана уравнения

$$\left.\begin{array}{c} u''_{xx} = u''_{yy} - q(y)u, \\ u(x,0) = e^{i\lambda x}, \quad u'_y(x,0) = i\lambda e^{i\lambda x} \end{array}\right\}$$

по формуле $K(y_0, x) = -\frac{1}{2}\{R'_x(x, 0; 0, y_0) + R'_y(x, 0; 0, y_0)\}$.

Следствие.

Решения $w(\lambda, x; h),\ w(\lambda, x; \infty)$ уравнения $y'' - q(x)y + \lambda^2 y = 0$ при начальных данных $w(\lambda, 0; h) = 1, \quad w_x(\lambda, 0; h) = h,\ w(\lambda, 0; \infty) = 0, \quad w_x'(\lambda, 0; \infty) = 1$ можно представить в виде

$$w(\lambda, x; h) = \cos \lambda x + \int\limits_{0}^{x} K(x, t; h) \cos \lambda t dt,$$

$$w(\lambda, x; \infty) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \int\limits_{0}^{x} K(x, t; \infty) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt,$$

где непрерывные функции

$$K(x, t; h),\ K(x, t; \infty)$$

выражаются через ядро $K(x, t)$ оператора $e_0(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int\limits_{-x}^{x} K(x, t)e^{i\lambda t} dt$, по формулам $K(x, t; h) = h + K(x, t) + K(x, -t) + h\int\limits_{t}^{x}\{K(x, \xi) - K(x, -\xi)\}d\xi$, $K(x, t; \infty) = K(x, t) - K(x, -t)$.

В **Главе 4** ряд формального решения разбивается на три ряда и каждый получившейся ряд исследуется.

Лемма 7. Формальное решение сходится абсолютно равномерно по $x \in [0, 1]$

и всех $t \in [-T, T]$, где $T > 0$ любое фиксированное число. Это утверждение следует из формулы

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{R_\lambda g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_n}\frac{R_\lambda g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda$$

и леммы 5. Лемма 3 сохраняет свою формулировку, т.е.

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R^0_\lambda\varphi_1)\cos(\rho t)d\lambda - \sum_{n>n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}(R^0_\lambda\varphi_1)\cos(\rho t)d\lambda,$$

только теперь оператор L_0 есть оператор $Ly = -y''(x)+q(x)y(x)$ при $q(x) \equiv 0$.

Оператор L_0 самосопряженный, его собственные значения $\lambda^0_n = 4\pi^2 n^2$, $n = 0, 1, ...$ Все собственные значения λ^0_n при $n \geq 1$ двукратны. Собственному значению $\lambda^0_0 = 0$ соответствует собственная функция $\varphi_0(x) = 1$, собственному значению λ^0_n при $n \geq 1$ соответствуют две собственные функции $\sqrt{2}\sin 2\pi nx$ и $\sqrt{2}\cos 2\pi nx$, т.е. система собственных функций есть обычная тригонометрическая система. Из предыдущей формулы по теореме вычетов получаем:

$$u_0(x,t) = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}[(\varphi_1(\xi), \cos 2\pi n\xi)\cos 2\pi nx +$$

$$+(\varphi_1(\xi), \sin 2\pi n\xi)\sin 2\pi nx]\cos 2\pi nt, \tag{1}$$

где

$$\varphi_1 = R^0_{\mu_0}g = R^0_{\mu_0}(L-\mu_0 E)\varphi.$$

Так как $\varphi_1(x) \in C^2[0,1]$ и удовлетворяет периодическим краевым условиям, то скалярные произведения формулы для (1) имеют оценку α_n/n^2 (считаем, что $\sum|\alpha_n|^2 < \infty$). Поэтому ряд (1) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и всех $t \in (-\infty, \infty)$. Из формулы (1) получаем

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}_1(x+t) + \tilde{\varphi}_1(x-t)].$$

где

$$\tilde{\varphi}_1(\tau) = (\varphi_1, 1) + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\varphi_1(\xi), \cos 2\pi n\xi)\cos 2\pi n\tau + (\varphi_1(\xi), \sin 2\pi n\xi)\sin 2\pi n\tau\right].$$

Таким образом, $\tilde{\varphi}_1(\tau) \in C^2(-\infty, \infty)$. Тем самым получена

Теорема 3.Функция $u_0(x,t)$ из (1) есть классическое решение смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t),$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), u_t'(x,0) = 0, x \in [0,1], t \in (-\infty, \infty).$$

Отметим, что теорема 3 есть хорошо известный факт, и приведенное выше рассуждение, таким образом, не является новым.

Лемма 8.Обозначим через $\psi(x)$ функции $\cos(x)$ или $\sin(x)$. Пусть $f(x) \in L_\infty[0,1]$ и $f(x,\mu) = f(x)\psi(\mu x)$, $\mu \in \gamma_0$, $\beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \psi(\pi n x))$. Тогда верна оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{2}|\beta_n(\mu)| \le C\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}}$$

где $C > 0$ и не зависит от n_1, n_2 и $\mu \in \gamma_0$.

Так же, как и лемма 8, доказывается

Лемма 9. Пусть $\psi(x)$ и $f(x)$ те же, что и в лемме 8,

$$\beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \psi(2\pi n x)).$$

Тогда имеет место оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{2}|\beta_n(\mu)| \le C\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}}.$$

Положим

$$b_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0}[w_1(x,\rho)(g,z_1) + w_2(x,\rho)(g,z_2) -$$

$$-w_1^0(x,\rho)(g,z_1^0) - w_2^0(x,\rho)(g,z_1^0)] \cos\rho t d\lambda.$$

Лемма 10. Ряды

$$\sum_{n \ge n_0} b^{(j)}_{n,x^j}(x,t), \quad \sum_{n \ge n_0} b^{(j)}_{n,t^j}(x,t), \quad j = 0,1,2,$$

сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T,T]$ при любом фиксированном $T>0$.

В **главе 5** Описывается классическое решение поставленной задачи. **Теорема 4**. Формальное решение $u(x,t)$ задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t),$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty),$$

дает классическое решение при условиях

$$\varphi(x) \in C^2[0,1], \quad \varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0,$$

$$\varphi''(0) - \varphi''(1) - (q(0) - q(1))\varphi(0) = 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе был исследован резольвентный подход к методу Фурье для однородного волнового уравнения с периодичными краевыми условиями. В результате удалось получить классическое решение для рассматриваемой задачи при минимальных условиях на исходные данные, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях.