Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики

Разложение по корневым функциям пучков дифференциальных операторов

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 215 группы

направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Чаркиной Ольги Александровны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент		В. С. Рыхлов
уч. степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор		А. П. Хромов
уч. степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение

В теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных операторов важное значение имеют вопросы, связанные с изучением спектральных свойств собственных и присоединённых функций, а именно, с исследованием полноты, базисности, возможности разложения в обобщенные ряды Фурье и т.д. Основополагающие результаты в этой области восходят к Г.Д. Биркгофу [1, 2] и В.А. Стеклову [3]. Другими исследователями получено дальнейшее их развитие и обобщение, для широких классов дифференциальных и интегро-дифференциальных операторных пучков и различных типов граничных условий.

Сложность задачи о разложимости в обобщенные ряды Фурье связана с асимптотическим поведением функции Грина при $|\lambda| \to \infty$. В регулярном и почти регулярном случаях, в терминологии Наймарка [5], она имеет не более чем степенной рост, что позволяет достаточно просто изучать спектральные свойства дифференциальных операторов. Нерегулярный случай, для которого характерен экспоненциальный рост функции Грина в некоторых секторах, представляет наибольшую сложность. В этом случае возникают серьезные трудности при исследовании спектральных свойств рассматриваемых операторов.

Бакалаврская работа посвящена изучению квадратичных по λ пучков дифференциальных операторов $L(\lambda)$ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, с граничными условиями, линейными по λ:

$$\ell(y,\lambda) = y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y = 0,$$
$$U_j(y,\lambda) = \alpha_{j1} y'(0) + \lambda \alpha_{j0} y(0) + \beta_{j1} y'(1) + \lambda \beta_{j0} y(1) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Краевые задачи, относящиеся к этому типу, изучались в работах А.И. Вагабова [17, 18] и В.С. Рыхлова [19–20], где для них было показано, что соответствующая система собственных функций не является двукратно полной, изучен вопрос об однократной полноте, и получено обобщение этих результатов на случай операторных пучков n-го порядка. Также, В.С. Рыхловым [25,26] были найдены двукратные разложения в ряд Фурье по собственным и присоединённым функциям и сформулированы необходимые и достаточные условия сходимости этих разложений в виде дифференциального уравнения для компонент разлагаемой вектор-функции.

Целью работы является доказательство теоремы о разложимости по корневым функциям рассматриваемой краевой задачи для двух случаев, в зависимости от кратности корней характеристического уравнения пучка. Работа состоит из введения и двух глав. Во введении описывается решаемая проблема и ее актуальность, содержатся краткие сведения о данной работе и полученных в ней результатах.

Первая глава посвящена случаю, когда характеристическое уравнение пучка имеет различные положительные корни, вторая глава — случаю, когда характеристическое уравнение имеет кратный корень. Каждая глава содержит 4 раздела, организованных по следующей схеме:

- Переход к эквивалентной матричной формулировке $\hat{L}Y = \lambda Y$.

- Построение резольвенты $(\hat{L} - \lambda E)^{-1}$.
- Для заданной вектор-функции F, частичные суммы ряда Фурье по собственным в.-ф. оператора $\hat{L}$ строятся по методу Коши–Пуанкаре путем интегрирования резольвенты по последовательности расширяющихся контуров в комплексной плоскости спектрального параметра λ:
$$I_\nu = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\nu} (\hat{L} - \lambda E)^{-1} F \, d\lambda.$$
В качестве Γ_ν принимаются окружности радиуса $r_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$. Для интегралов I_ν выводятся асимптотические формулы
$$I_\nu = J[F] + o(1), \quad \nu \to \infty.$$
- В пределе $\nu \to \infty$ получается свойство разложимости для функции F:
$$J[F] = F,$$
анализ которого и даёт решение задачи в виде некоторых дифференциальных уравнений на функцию F.

Построение резольвенты $L(\lambda)$ эквивалентно решению неоднородной краевой задачи
$$\ell(v_0, \lambda) = f(x, \lambda), \qquad U_j(v_0, \lambda) = a_j, \quad j = 1, 2.$$
Её решение находится явно, методом вариации произвольных постоянных. При этом можно не делать никаких предположений о коэффициентах граничных условий, то есть, формулы для резольвенты годятся и в регулярном, и в нерегулярном случаях.

Способ построения частичных сумм ряда Фурье при помощи контурных интегралов вида I_ν используется, начиная с работ Г.Д. Биркгофа [2] и Я.Д. Тамаркина [4].

Вывод асимптотических формул проводится в сильно нерегулярном случае и при ряде дополнительных ограничений на параметры задачи. Эта часть работы наиболее сложна технически, так как получение оценок требует выделения слагаемых, имеющих экспоненциальный рост на бесконечности.

Ответы, полученные при анализе условия $J[F] = F$, имеют вид дифференциальных уравнений для компонент функции F. Эти уравнения, определяющие необходимые и достаточные условия разложимости, и являются основным результатом работы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе рассматривается краевая задача для квадратичного пучка дифференциальных операторов второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами

$$\ell(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y = 0,$$
$$U_j(y,\lambda) := \alpha_{j1}y'(0) + \lambda\alpha_{j0}y(0) + \beta_{j1}y'(1) + \lambda\beta_{j0}y(1) = 0, \quad j = 1,2,$$

где $p_1, p_2, \alpha_{ji}, \beta_{ji} \in \mathbb{C}$. Предполагается, что корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения пучка $L(\lambda)$ различны и положительны. Характеристический определитель пучка равен

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2(a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1}a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2}a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}a_{12}),$$

где константы $a_{\bar{1}\bar{2}}, a_{1\bar{2}}, a_{\bar{1}2}, a_{12}$ явно вычисляются по фундаментальной системе решений.

Определение 1. *(М.А. Наймарк, А.А. Шкаликов [5,11]). Краевая задача называется регулярной по Биркгофу, если $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$ и $a_{12} \neq 0$. Задача называется сильно нерегулярной, если выполняется одно из следующих условий:*

$$a_{12} = 0 \quad \textit{или} \quad a_{12} = a_{\bar{1}2} = 0 \quad \textit{или} \quad a_{\bar{1}\bar{2}} = 0 \quad \textit{или} \quad a_{\bar{1}\bar{2}} = a_{1\bar{2}} = 0.$$

В регулярном случае получение теоремы о разложении по корневым функциям не представляет трудностей. Бакалаврская работа посвящена разбору сильно нерегулярного случая $a_{\bar{1}\bar{2}} = a_{1\bar{2}} = 0$.

• В разделе 1.1 краевая задача приводится к эквивалентному матричному виду

$$\hat{L}v = \lambda v, \quad U_j(v) = 0, \quad j = 1,2,$$

где линейный оператор $\hat{L}$ действует на вектор-функции $v = (v_0, v_1)^\top$ согласно формуле

$$\hat{L}v := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{p_2}\dfrac{d^2}{dx^2} & -\dfrac{p_1}{p_2}\dfrac{d}{dx} \end{pmatrix} v.$$

• В разделе 1.2 строится резольвента оператора $\hat{L}$, что эквивалентно решению неоднородной краевой задачи

$$\ell(v_0,\lambda) = f(x,\lambda), \qquad U_j(v_0,\lambda) = a_j, \quad j = 1,2.$$

Её решение находится явно, в квадратурах, методом вариации произвольных постоянных.

Теорема 1. *Решение $v_0(x,\lambda)$ имеет вид*

$$v_0(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda\Delta_0}\Big(b_1a_{1\bar{2}}e^{\lambda\omega_1 x} + b_1a_{12}e^{\lambda(\omega_1 x+\omega_2} - b_2a_{2\bar{2}}e^{\lambda\omega_1 x} + e^{\lambda\omega_1 x}|AV_2| + e^{\lambda(\omega_1 x+\omega_2)}|AW_2|$$
$$+ b_1a_{\bar{1}1}e^{\lambda\omega_2 x} - b_2a_{\bar{1}2}e^{\lambda\omega_2 x} - b_2a_{12}e^{\lambda(\omega_1+\omega_2 x)} + e^{\lambda\omega_2 x}|V_1A| + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2 x)}|W_1A|\Big)$$
$$+ \frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)}\int\limits_0^x (e^{\lambda\omega_2(x-t)} - e^{\lambda\omega_1(x-t)})f(t,\lambda)dt.$$

• Раздел 1.3 посвящен вопросу о разложении вектор-функции f в биортогональный ряд Фурье по собственным вектор-функциям оператора $\hat{L}$. Известно [2,4], что частичные суммы такого разложения совпадают с интегралами вида

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu}(\hat{L}-\lambda E)^{-1}f\,d\lambda,$$

по контурам Γ_ν в комплексной плоскости спектрального параметра λ, охватывающим конечное число собственных значений пучка $L(\lambda)$. В качестве таких контуров принимаются окружности радиуса r_ν, такие, что $r_\nu\to\infty$ при $\nu\to\infty$. Основной результат этого раздела заключается в выводе асимптотических формул для контурных интегралов, с использованием Теоремы 1.

В качестве дополнительных предположений далее принимается, что

$$f_0(0)=f_0(1)=0,\quad a_{12}=0.$$

С учетом этих предположений, для v_0 получается представление вида

$$v_0(x,\lambda)=A_1(x,\lambda)+h(x,\lambda)+A_2(x,\lambda)+g(x,\lambda),$$

где:

$$\begin{aligned}
A_1(x,\lambda)&=\frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)\Delta_0}\Big(a_{1\bar{2}}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1x+\omega_1(1-t))}\tilde{f}(t)dt-a_{2\bar{2}}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1x+\omega_2(1-t))}\tilde{f}(t)dt\\
&\quad+a_{\bar{1}1}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_2x+\omega_1(1-t))}\tilde{f}(t)dt-a_{\bar{1}2}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_2x+\omega_2(1-t))}\tilde{f}(t)dt\Big);\\
h(x,\lambda)&=\frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)}\int\limits_0^x(e^{\lambda\omega_2(x-t)}-e^{\lambda\omega_1(x-t)})\tilde{f}(t)dt;\\
A_2(x,\lambda)&=-\frac{p_2}{(\omega_2-\omega_1)\Delta_0}\Big(a_{1\bar{2}}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1x+\omega_1(1-t))}f_0(t)dt-a_{2\bar{2}}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1x+\omega_2(1-t))}f_0(t)dt\\
&\quad+a_{\bar{1}1}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_2x+\omega_1(1-t))}f_0(t)dt-a_{\bar{1}2}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_2x+\omega_2(1-t))}f_0(t)dt\Big);\\
g(x,\lambda)&=-\frac{p_2}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^x(e^{\lambda\omega_2(x-t)}-e^{\lambda\omega_1(x-t)})f_0(t)dt.
\end{aligned}$$

Далее, равенство $v_0=A_1+h+A_2+g$ интегрируется по круговым контурам Γ_ν. При этом, учитывается, что функции $g(x,\lambda)$, $h(x,\lambda)$ являются целыми аналитическими в комплексной плоскости λ и интегралы от них по любому замкнутому контуру равны нулю. Чтобы получить оценку интеграла, разобъём контур на дуги Γ_ν^+ — часть Γ_ν при $\operatorname{Re}\lambda\ge 0$, и Γ_ν^- — часть Γ_ν при $\operatorname{Re}\lambda<0$. Прежде всего, можно доказать, что вклад интеграла по Γ_ν^- асимптотически мал.

Утверждение 2. *Имеет место оценка*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} v_0(x,\lambda)d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu^+} (A_1(x,\lambda)+A_2(x,\lambda))d\lambda + o(1), \quad \nu\to\infty.$$

Для слагаемых A_1, A_2 доказываются следующие оценки.

Утверждение 3. *Имеет место оценка*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu^+} A_1(x,\lambda)d\lambda = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Big(e_2p_2F_1\Big(\frac{x}{\tau}\Big) + e_1p_2F_1(\tau x+1-\tau) - p_2F_1(x)$$
$$- e_2p_1f_0\Big(\frac{x}{\tau}\Big) + e_1p_1f_0(\tau x+1-\tau) - p_1f_0(x)\Big) + o(1), \quad \nu\to\infty.$$

Утверждение 4. *Имеет место оценка*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu^+} A_2(x,\lambda)d\lambda = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Big(-\frac{e_2p_2}{\omega_2}f_0\Big(\frac{x}{\tau}\Big)$$
$$+\frac{e_1p_2}{\omega_1}f_0(\tau x+1-\tau) - \frac{p_1}{\omega_2}f_0(x)\Big) + o(1), \quad \nu\to\infty.$$

Утверждение 5. *Имеет место асимптотическая формула*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} v_1(x,\lambda)d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu^+} (B_1(x,\lambda)+B_2(x,\lambda))d\lambda + o(1), \quad \nu\to\infty.$$

Утверждение 6. *Имеет место оценка*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu^+} B_1(x,\lambda)d\lambda = \frac{p_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(-\frac{e_2}{\omega_2}f_1\Big(\frac{x}{\tau}\Big) + \frac{e_1}{\omega_1}f_1(\tau x+1-\tau) - \frac{1}{\omega_2}f_1(x)\Big)$$
$$+\frac{p_1}{\omega_2-\omega_1}\Big(-\frac{e_2}{\omega_2}f_0'\Big(\frac{x}{\tau}\Big) + \frac{e_1}{\omega_1}f_0'(\tau x+1-\tau) - \frac{1}{\omega_2}f_0'(x)\Big) + o(1), \quad \nu\to\infty.$$

Утверждение 7. *Имеет место оценка*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu^+} B_2(x,\lambda)d\lambda = \frac{p_2}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(-\frac{e_2}{\omega_2^2}f_0'\Big(\frac{x}{\tau}\Big)$$
$$+\frac{e_1}{\omega_1^2}f_0'(\tau x+1-\tau) - \frac{1}{\omega_2^2}f_0'(x)\Bigg) + o(1), \quad \nu\to\infty.$$

Собирая все вместе, получаем следующую теорему, которая является основным результатом раздела 1.3.

Теорема 8. *При $\nu\to\infty$ выполняются следующие асимптотические формулы:*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} v_0(x,\lambda)d\lambda = \frac{p_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(-e_2F_1\Big(\frac{x}{\tau}\Big) + e_1F_1(\tau x+1-\tau) - F_1(x)\Big)$$
$$+\frac{p_1\omega_2+p_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(-\frac{e_2}{\omega_2}f_0\Big(\frac{x}{\tau}\Big) + \frac{e_1}{\omega_1}f_0(\tau x+1-\tau) - \frac{1}{\omega_2}f_0(x)\Big) + o(1);$$

$$
-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} v_1(x,\lambda)d\lambda = \frac{p_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(-\frac{e_2}{\omega_2}f_1\Big(\frac{x}{\tau}\Big)+\frac{e_1}{\omega_1}f_1(\tau x+1-\tau)-\frac{1}{\omega_2}f_1(x)\Big)
$$
$$
+\frac{p_2+\omega_2 p_1}{\omega_2-\omega_1}\Big(-\frac{e_2}{\omega_2^2}f_0'\Big(\frac{x}{\tau}\Big)+\frac{e_1}{\omega_1^2}f_0'(\tau x+1-\tau)-\frac{1}{\omega_2^2}f_0'(x)\Big)+o(1).
$$

• В разделе 1.4 выводятся условия на функции f_0, f_1, обеспечивающие выполнение асимптотических равенств

$$
-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} v_0(x,\lambda) = f_0(x)+o(1), \quad \nu\to\infty,
$$
$$
-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} v_1(x,\lambda) = f_1(x)+o(1), \quad \nu\to\infty,
$$

которые служат необходимыми и достаточными условиями в теореме о разложимости по корневым функциям. Сравнение с формулами из Теоремы 8 позволяет получить отсюда условия на функции f_0, f_1 в виде функционально-дифференциальных уравнений.

Утверждение 9. *Асимптотические равенства выполняются в том и только том случае, если функции $f_0(x)$, $f_1(x)$ и $F_1(x)=\int\limits_0^x f_1(t)dt$ удовлетворяют следующим уравнениям, тождественно по $x\in[0,1]$:*

$$
e_2\omega_2 f_0\Big(\frac{x}{\tau}\Big)-e_1\omega_1 f_0(\tau x+1-\tau)+\omega_1 f_0(x)
$$
$$
-p_2\Big(e_2F_1\Big(\frac{x}{\tau}\Big)-e_1F_1(\tau x+1-\tau)+F_1(x)\Big)=0,
$$
$$
-e_2\omega_1 f_1\Big(\frac{x}{\tau}\Big)+e_1\omega_2 f_1(\tau x+1-\tau)-\omega_2 f_1(x)
$$
$$
+e_2 f_0'\Big(\frac{x}{\tau}\Big)-e_1 f_0'(\tau x+1-\tau)+f_0'(x)=0.
$$

Полученные условия представляют собой довольно сложную систему функционально-дифференциальных уравнений для функций f_0, f_1, но оказывается, что её можно упростить. Ответ приведен в следующей теореме, которая является основным результатом раздела 1.4.

Теорема 10. *Пусть имеет место сильно нерегулярный случай*

$$
a_{12}=a_{1\bar{2}}=0.
$$

Для того, чтобы для функций f_0, f_1, удовлетворяющих условиям $f_0'', f_1'\in L_p[0,1]$, $p>1$, и

$$
f_0(0)=f_0(1)=f_0'(0)=f_0'(1)=f_1(0)=f_1(1)=0
$$

выполнялось свойство разложимости по корневым функциям этой краевой задачи, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_0(x)$, $f_1(x)$ удовлетворяли следующим уравнениям, тождественно по $x\in[0,1]$:

$$
e_1(f_0'(x)-\omega_2 f_1(x))=0,
$$
$$
e_2\Big(f_0'\Big(\frac{x}{\tau}\Big)-\omega_1 f_1\Big(\frac{x}{\tau}\Big)\Big)+f_0'(x)-\omega_2 f_1(x)=0.
$$

Также, можно выделить несколько частных случаев, которые покрывают все решения рассматриваемой системы. Для каждого из них условия разложимости имеют уже достаточно простой вид.

Утверждение 11. *В условиях теоремы 10, для выполнения свойства разложимости по корневым функциям необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих трёх условий:*

1) при $e_2 = 0$*:*

$$f_0'(x) - \omega_2 f_1(x), \quad x \in [0,1];$$

2) при $e_2 \neq 0$*,* $e_1 \neq 0$*:*

$$f_0'(x) - \omega_2 f_1(x), \quad x \in [0,1], \qquad f_1(x) = 0, \quad x \in [0, 1/\tau];$$

3) при $e_2 \neq 0$*,* $e_1 = 0$*:*

$$e_2\Big(f_0'\Big(\frac{x}{\tau}\Big) - \omega_1 f_1\Big(\frac{x}{\tau}\Big)\Big) + f_0'(x) - \omega_2 f_1(x) = 0, \quad x \in [0,1].$$

Во второй главе рассматривается разложение по корневым функциям квадратичного пучка в случае 2-кратных характеристик, для краевой задачи вида

$$\ell(y,\lambda) := y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0, \qquad y = y(x), \quad x \in [0,1],$$
$$U_1(y,\lambda) := y(0) = 0, \quad U_2(y,\lambda) := y'(1) - \lambda y'(0) = 0.$$

Как и в первой главе, требуется выяснить, при каких условиях имеет место разложимость в 2-кратный ряд по корневым функциям пучка.

В данном случае характеристическое уравнение для оператора ℓ

$$\omega^2 - 2\omega + 1 = 0$$

имеет один двукратный корень $\omega_1 = 1$, а характеристический определитель равен

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda e^\lambda - \lambda^2 & (1+\lambda)e^\lambda - \lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)e^\lambda - \lambda.$$

Его нули, определяющие собственные значения задачи, находятся из уравнения

$$e^\lambda = 1 - \frac{1}{1+\lambda},$$

откуда нетрудно получить асимптотическую формулу

$$\lambda_k = 2k\pi i + O\Big(\frac{1}{k}\Big), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

• В разделе 2.1 рассматриваемая задача переписывается в эквивалентном матричном виде, линейном по λ, используя производные цепочки (подход М.В. Келдыша и др. [6, 11, 17, 24]):

$$y_1 = y, \quad y_2 = \lambda y_1.$$

В этих переменных задача записывается в виде

$$\begin{cases} y_2 - \lambda y_1 = 0, \\ -y_1'' + 2y_2' - \lambda y_2 = 0, \end{cases}$$
$$y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) - y_2'(0) = 0$$

или, кратко, в виде

$$D(Y) = \lambda Y,$$
$$U_1(Y) := y_1(0) = 0, \quad U_2(Y) := y_1'(0) - y_2'(0) = 0,$$

где обозначено

$$D(Y) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -D_x^2 & 2D_x \end{pmatrix} Y, \quad D_x = \frac{d}{dx}, \quad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

• В разделе 2.2 строится резольвента $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda E)^{-1}$, где $\hat{L}$ оператор, порождённый дифференциальным оператором $D(Y)$ и краевыми условиями. Это эквивалентно решению неоднородной краевой задачи относительно вектор-функции Y

$$y_2 - \lambda y_1 = f_1,$$
$$-y_1'' + 2y_2' - \lambda y_2 = f_2,$$
$$U_i(Y) = 0, \quad i = 1, 2,$$

которую можно переписать и в эквивалентном скалярном виде.

Утверждение 12. *Компонента $y = y_1$ удовлетворяет краевой задаче*

$$y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = f(x, \lambda), \quad f(x, \lambda) := -\lambda f_1 + 2f_1' - f_2,$$
$$U_1(y, \lambda) = y(0) = 0, \quad U_2(y, \lambda) = y'(1) - \lambda y'(0) = f_1'(0).$$

В дальнейшем принимаются следующие предположения относительно функций f_1, f_2:

$$f_1,\ f_1',\ f_1'',\ f_1''',\ f_2,\ f_2',\ f_2'' \in L_1[0, 1];$$
$$f_1(0) = f_1(1) = f_1'(0) = f_1'(1) = f_1''(0) = f_1''(1)$$
$$= f_2(0) = f_2(1) = f_2'(0) = f_2'(1) = 0.$$

Утверждение 13. *Общее решение уравнения для y имеет вид*

$$y(x, \lambda) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + \int_0^x (x - t) e^{\lambda(x-t)} f(t, \lambda) dt.$$

Используя метод вариации произвольных постоянных, получаем следующее представление.

Теорема 14. *Решение краевой задачи для y имеет вид*

$$y(x,\lambda) = \int\limits_0^x (x-t)e^{\lambda(x-t)} f(t,\lambda)dt - \frac{1}{\Delta(\lambda)} \int\limits_0^1 e^{\lambda(x+1-t)} x(1+\lambda(1-t)) f(t,\lambda)dt.$$

• В разделе 2.3 доказываются асимптотические формулы для интегралов от $y = y_1$ и y_2 по системе расширяющихся контуров, в качестве которых мы примем окружности Γ_ν радиусов $\nu + \frac{1}{2}\pi$ (см. асимптотику собственных значений). Как и в разделе 1.3, эти оценки используются далее в доказательстве теоремы о разложимости по корневым функциям.

Для доказательства следующих Утверждений используется разбиение контура на части Γ_ν^- и Γ_ν^+, лежащие, соответственно, в левой и правой полуплоскостях.

Утверждение 15. *При сделанных предположениях относительно функций f_1, f_2 имеет место следующая асимптотика:*

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\nu} y(x,\lambda)d\lambda = x(f_1'(x) - f_2(x)) \\ - x \int\limits_0^x e^{t-x}(tf_1''(t) - f_2(t) - tf_2'(t))dt + o(1), \quad \nu \to \infty.$$

Утверждение 16. *При сделанных предположениях относительно функций f_1, f_2 имеет место асимптотика*

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\nu} y_2(x,\lambda)d\lambda = f_2(x) + (x-1)(f_2(x) + xf_2'(x) - xf_1''(x)) \\ - x \int\limits_0^x e^{t-x}(f_2(t) + tf_2'(t) - tf_1''(t))dt + o(1), \quad \nu \to \infty.$$

• В разделе 2.4 выводятся условия на функции f_0, f_1 обеспечивающие свойство разложимости по корневым функциям. Это свойство эквивалентно выполнению асимптотических формул при $\nu \to \infty$,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} y_1(x,\lambda) = f_1(x) + o(1), \quad -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} y_2(x,\lambda) = f_2(x) + o(1),$$

которые теперь только остаётся сравнить с формулами, полученными в Утверждениях 15, 16.

Теорема 17. *Пусть функции f_1, f_2 удовлетворяют сделанным предположениям. Для того, чтобы для них имела место разложимость в 2-кратный ряд по корневым функциям рассматриваемой краевой задачи, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$f_1(x) - xf_1'(x) + xf_2(x) = 0.$$

Замечательным обстоятельством является то, что полученное условие совпадает с условием разложимости, полученным в работе [24] для того же квадратичного пучка, но с другим граничным условием ($y'(1) - y'(0) = 0$ вместо условия $y'(1) - \lambda y'(0) = 0$).

Заключение

В бакалаврской работе рассмотрены два примера краевых задач для пучка дифференциальных операторов, квадратичного по спектральному параметру λ, и с граничными условиями, линейными по λ. Одна краевая задача отвечает случаю простых корней характеристического уравнения, вторая — случаю кратных корней.

Оба эти примера относятся к сильно нерегулярному случаю, в терминологии Наймарка, для которого получение теоремы о разложимости по корневым функциям пучка является нетривиальной задачей.

При некоторых дополнительных предположениях в Теоремах 10 и 17 получены необходимые и достаточные условия на вектор-функцию f, при выполнении которых для нее имеет место двукратная разложимость в ряд Фурье по корневым элементам пучка. Эти условия имеют вид дифференциального уравнения для компонент вектор-функции f. Перечислены также частные случаи, для которых условия разложимости принимают более простой вид.