Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики

Полнота корневых функций пучков дифференциальных операторов

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Сергушовой Марии Викторовны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ________________ В. С. Рыхлов
уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ________________ А. П. Хромов
уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Теории полиномиальных операторных пучков посвящено очень много работ. Многие задачи математической физики приводят к задаче определения и разложения произвольной функции в ряд по собственным функциям. Полнота системы собственных функций является очень важным свойством. Без этого свойства, например, не может идти речь о базисности системы собственных функций.

Основополагающей работой по вопросу полноты корневых функций пучка является работа М.В. Келдыша, в которой была сформулирована без доказательства теорема об n-кратной полноте корневых функций частного случая пучка $L(\lambda)$, а именно пучка, порожденного дифференциальным выражением со специальной главной частью:

$$\ell(y,\lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\},$$

и распадающимися краевыми условиями

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_{ij} y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1,l}, \\ \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_{ij} y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1,n} \quad (2l > n). \end{cases}$$

В 1973 году эта теорема была доказана А.П. Хромовым в случае аналитических коэффициентов дифференциального выражения, а в 1976 А.А. Шкаликов доказал эту теорему в случае суммируемых коэффициентов.

Наиболее полное исследование вопроса о кратной полноте корневых функций пучка $L(\lambda)$, дифференциальное выражение которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия полураспадающиеся, провел А.И. Вагабов в серии своих работ 1981–1987 годов. Также данный вопрос рассматривает В.С. Рыхлов в своих работах, начиная с 1992 года.

В данной работе рассматривается пучок $L_0(\lambda)$, порожденный однородным дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами

$$l_0(y,\lambda) = \sum_{s+k=n} p_{sk} \lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \neq 0,$$

и двухточечными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} U_i^0(y,\lambda) &= \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) = 0, && i = \overline{1,l}, \\ U_i^0(y,\lambda) &= \sum_{s+k\leqslant\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) + \sum_{s+k\leqslant\varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk} y^{(k)}(1) = 0, && i = \overline{l+1,n}, \end{aligned}$$

где $\lambda, \alpha_{isk}, \beta_{isk} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$.
Для него изучается вопрос нахождения условий на коэффициенты пучка $L_0(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота. В последнем случае естественно возникает вопрос об условиях m-кратной полноты при $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Приводится случай обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка, для которого полученные условия на коэффициенты пучка являются неприменимыми, поэтому вопрос полноты данного пучка изучается отдельно.

Работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

Во введении описывается рассматриваемая задача и её актуальность, содержатся краткие сведения о данной работе.

В первом разделе содержатся сведения для рассмотрения поставленной задачи, вводятся необходимые обозначения, приводятся вспомогательные леммы, на основании которых получен основной результат.

Во втором разделе описывается случай обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка, для которого полученные в первом разделе условия неприменимы. Для данного случая рассматривается ряд лемм и теорем, на основании которых доказывается теорема о полноте системы корневых функций данного пучка.

В приложении приводится код программы, написанный согласно условиям теоремы о полноте из второго раздела, и различные результаты выполнения программы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе рассматривается полиномиальный пучок обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка $L_0(\lambda)$, действующий в пространстве $L_2[0,1]$ и для него исследуется вопрос m-кратной полноты системы корневых функций при $m \leqslant n-l$.

Для формулировки основного результата предполагаем, что $0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n$, где $\omega_j, \quad j=\overline{1,n}$ – корни характеристического уравнения дифференциального выражения $l_0(y,\lambda)$. Тогда функции $y_j(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_j x}, \quad j=\overline{1,n}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $l_0(y,\lambda)=0$ при $\lambda \neq 0$.

Также вводятся следующие обозначения

$$a_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_j^k, \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,n},$$

$$b_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk}\omega_j^k, \quad i=\overline{l+1,n}, \quad j=\overline{l+1,n},$$

$$\varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0},\varkappa_{i1}\}, \quad i=\overline{l+1,n}, \quad [n]_+ = \begin{cases} n, & \text{если} \quad n \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad n < 0. \end{cases}$$

$\Phi_i(x,\lambda)$ – функция, полученная из $\Delta(\lambda)$ заменой i–ой строки в случае $l+1 \leqslant i \leqslant n$ строкой $y_1(x,\lambda),\ldots,y_n(x,\lambda)$, где $\Delta(\lambda)$ – характеристический определитель пучка.

$$\Theta_i(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^{j-1}\Phi_i(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} h_j(x)dx, \quad i=\overline{l+1,n},$$

где $h(x) = (h_1(x),\ldots,h_m(x))^T \in L_2^m[0,1]$.

Для доказательства основной теоремы данного раздела используются следующие утверждения и леммы.

Утверждение 1. *Функции $\Phi_{l+1}(x,\lambda),\ldots,\Phi_n(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями уравнения $l_0(y,\lambda)=0$, удовлетворяющими первым l краевым условиям в точке 0.*

Утверждение 2. *Функции $\Theta_i(\lambda)$ не зависят от выбора фундаментальной системы решений уравнения $l_0(y,\lambda)=0$.*

Лемма 1. *Если*

$$\det\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{l} \neq 0, \quad \det\left(b_{ij}\right)_{i,j=l+1}^{n} \neq 0,$$

то при $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ *и* $|\lambda| \gg 1$ *справедливы оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)| \leqslant C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_{i1}}, \quad i = \overline{l+1, n},$$

где $\Pi_\varepsilon^+ = \left\{\lambda \in \mathbb{C} | \arg\lambda \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right] \bigcup \left[\frac{3\pi}{2} + \varepsilon, 2\pi\right)\right\}$,
а если

$$\det\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0,$$

то при $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ *и* $|\lambda| \gg 1$ *справедливы оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)| \leqslant C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_{i0}}, \quad i = \overline{l+1, n},$$

где $\Pi_\varepsilon^- = \left\{\lambda \in \mathbb{C} | \arg\lambda \in \left[\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right]\right\}$.

Следствие 1. *Если выполняются условия леммы* 1 *и* $\lambda \in \Pi_\varepsilon^\pm$*, то при* $|\lambda| \gg 1$ *справедливы оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)| \leqslant C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_i}, \quad i = \overline{l+1, n}.$$

Тогда основная теорема первого раздела формулируется так:

Теорема 1. *Если выполняется условие* $0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n$ *и*

$$\det\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{l} \neq 0, \quad \det\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0, \quad \det\left(b_{ij}\right)_{i,j=l+1}^{n} \neq 0,$$

то система корневых функций пучка $L_0(\lambda)$ m*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *при* $m \leqslant n - l$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum\limits_{i=l+1}^{n} [m - 1 + \varkappa_i]_+$.

Во втором разделе в пространстве $L_2[0,1]$ рассматривается пучок операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y, \lambda) = y^{''} + \lambda p_1 y^{'} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными краевыми условиями

$$U_\nu(y,\lambda) = U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) = \\ = (\alpha_{\nu 1} y^{'}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + (\beta_{\nu 1} y^{'}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$.

Как и в первом разделе, предполагаем, что $0 < \omega_1 < \omega_2$, где ω_1, ω_2 – корни характеристического уравнения. Тогда $y_1(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_1 x}, \quad y_2(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_2 x}$. При $\lambda \neq 0$ эти функции являются линейно независимыми решениями уравнения $l(y,\lambda) = 0$.

В данном разделе показывается, что собственные функции 2-кратно не полны с бесконечным дефектом ни в каком пространстве $L_2[0,\sigma], \quad \sigma > 0$. Также исследуется вопрос 1-кратной полноты собственных функций этого пучка в пространстве $L_2[0,\sigma]$.

Для формулировки основного результата вводятся следующие обозначения:

$$v_{\nu j} = \frac{U_{\nu 0}(y,\lambda)}{\lambda}, \quad w_{\nu j} = e^{-\lambda\omega_j}\frac{U_{\nu 1}(y,\lambda)}{\lambda}, \quad v, j = 1, 2$$

и

$$V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T, \quad W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T \quad j = 1, 2.$$

Используя введенные векторы, для простоты вводятся следующие обозначения для определителей:

$$a_{sk} = \det(W_s, W_k), \quad a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k),$$

$$a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k), \quad a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k).$$

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1,\lambda) & U_1(y_2,\lambda) \\ U_2(y_1,\lambda) & U_2(y_2,\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2(a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1}a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2}a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}a_{12}) =$$

$$= \lambda^2\Delta_0(\lambda).$$

Всюду в дальнейшем используются следующие условия:

1^0) ω_1, ω_2 различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, выходящем из начала координат;
2^0) $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0, \quad a_{1\bar{2}} \neq 0, \quad a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0$;
3^0) $W_2 \neq 0$ или: $W_2 = 0$ и $a_{1\bar{1}} = 0$;
4^0) $W_2 = 0$ и $a_{1\bar{1}} \neq 0$.

Лемма 2. *Если выполняются условия $1^0 - 3^0$, то функция*

$$y(x,\lambda) := e^{\lambda\omega_1 x}$$

является порождающей для собственных функций пучка $L(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$.

Лемма 3. *Если выполняются условия* 1^0, 2^0, 4^0, *то функция*

$$y(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_1 x} + b_0 e^{\lambda\omega_2 x},$$

где $b_0 \neq 0$, *является порождающей для собственных функций пучка* $L(\lambda)$ *при* $\lambda \neq 0$.

Теорема 2. *Если выполняются условия* $1^0 - 3^0$, *то система* $Y = \{y(x,\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, *где* $y(x,\lambda)$ *определяется согласно лемме* 2, 1-*кратно полна в* $L_2[0,\sigma]$, *а относительно* 2-*кратной полноты имеет бесконечный дефект.*

Теорема 3. *Если выполняются условия* 1^0, 2^0, 4^0, *то система* $Y = \{y(x,\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, *где* $y(x,\lambda)$ *определяется согласно лемме* 3, 2-*кратно не полна в* $L_2[0,\sigma]$ *и имеет бесконечный дефект относительно* 2-*кратной полноты при любом* $\sigma > 0$.

Рассматривая вопрос об 1-кратной полноте системы Y в $L_2[0,\sigma]$ в случае 4^0, считаем, что функции системы Y продолжены на отрезок $[1,\sigma]$ при $\sigma > 1$ по формуле для $y(x,\lambda)$ согласно лемме 3.

Вводится следующее обозначение:
$\mathfrak{N}_\sigma$–дефектное подпространство системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$, то есть $\mathfrak{N}_\sigma : L_2[0,\sigma] \ominus \mathfrak{M}_\sigma$, где $\mathfrak{M}_\sigma$ – замыкание линейной оболочки системы Y.

Для того, чтобы охарактеризовать $\mathfrak{N}_\sigma$, рассматриваются операторы $B \in L_2[0,\sigma] \to L_2[0,\sigma\tau]$ и $A_\rho \in L_2[0,\rho] \to L_2[0,1]$, определяемые следующими формулами:

$$(Bf)(x) = f\left(\frac{x}{\tau}\right), \quad (A_\rho f)(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{s} \bar{c}_0^j f(x+j), & x \in [0,\rho-s]; \\ \sum\limits_{j=0}^{s-1} \bar{c}_0^j f(x+j), & x \in (\rho-s,1]; \end{cases}$$

где $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и удовлетворяет неравенствам $s < \rho \leqslant s+1$.

Лемма 4. *Если выполняются условия* 1^0, 2^0, 4^0, *то справедливо* $\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\sigma^0$, *где*

$$\mathfrak{N}_\sigma^0 = \left\{ f \in L_2[0,\sigma] : A_\sigma f + \frac{\bar{b}_0}{\tau} A_{\sigma\tau} B f = 0 \right\}.$$

Теорема 4. *Если выполняются условия* 1^0, 2^0, 4^0, *то система* Y *полна в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *тогда и только тогда, когда уравнение*

$$A_\sigma f + \frac{\bar{b}_0}{\tau} A_{\sigma\tau} B f = 0$$

имеет только тривиальное решение.

Для исследования достаточных условий 1-кратной полноты в пространстве $L_2[0,\sigma]$ рассматривается уравнение

$$A_\sigma f + \frac{\bar b_0}{\tau} A_{\sigma\tau} B f = g,$$

где g —заданная функция в $L_2[0,\sigma]$.

Лемма 5. *Если выполняются условия* 1^0, 2^0, 4^0 *и* $l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *таковы, что* $l < \sigma \leqslant l+1$, $m < \sigma\tau \leqslant m+1$, *то уравнение*

$$A_\sigma f + \frac{\bar b_0}{\tau} A_{\sigma\tau} B f = g$$

имеет вид

1) *при* $\sigma - l < \sigma\tau - m$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{l} \bar c_0^j f(x+j) + \frac{\bar b_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m} \bar c_0^j f(\frac{x+j}{\tau}) = g(x), \quad x \in [0, \sigma - l]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l-1} \bar c_0^j f(x+j) + \frac{\bar b_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m} \bar c_0^j f(\frac{x+j}{\tau}) = g(x), \quad x \in (\sigma - l, \sigma\tau - m]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l-1} \bar c_0^j f(x+j) + \frac{\bar b_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \bar c_0^j f(\frac{x+j}{\tau}) = g(x), \quad x \in (\sigma\tau - m, 1]; \end{cases}$$

2) *при* $\sigma\tau - m \leqslant \sigma - l$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{l} \bar c_0^j f(x+j) + \frac{\bar b_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m} \bar c_0^j f(\frac{x+j}{\tau}) = g(x), \quad x \in [0, \sigma\tau - m]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l} \bar c_0^j f(x+j) + \frac{\bar b_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \bar c_0^j f(\frac{x+j}{\tau}) = g(x), \quad x \in (\sigma\tau - m, \sigma - l]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l-1} \bar c_0^j f(x+j) + \frac{\bar b_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \bar c_0^j f(\frac{x+j}{\tau}) = g(x), \quad x \in (\sigma - l, 1]; \end{cases}$$

Основным результатом данного раздела является нахождение достаточных условий 1-кратной полноты системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* 1^0, 2^0, 4^0.

1) *Если* $0 < \sigma \leqslant \frac{1}{\tau}$, *то система* Y 1*-кратно полна в* $L_2[0,\sigma]$.

2) *Если при некотором* $m \in \mathbb{N}$ *выполняются неравенства*

$$\frac{m}{\tau} < \sigma \leqslant \min\left\{1, \frac{m+1}{\tau}\right\}, \quad \tau > m,$$

то для 1*-кратной полноты системы* Y *в* $L_2[0,\sigma]$ *достаточно выполнения условия*

$$|b_0|^2 \sum_{j=0}^{m} |c_0|^{2j} < \tau.$$

В приложении приводится программа, реализованная на языке Java, для пучка операторов $L(\lambda)$, рассматриваемого в разделе 2. В зависимости от введённых параметров, а именно p_1, p_2, $\alpha_{\nu 1}, \alpha_{\nu 2}, \beta_{\nu 1}, \beta_{\nu 2}$ при $\nu = 1, 2$, программа согласно условиям теорем 2 и 5 выводит на экран сообщение о полноте системы и величине параметра σ или, в противном случае, о том, что при данных условиях о полноте вести речь нельзя.

Различные случаи выполнения программы для пучка $L(\lambda)$:

1) $l(y, \lambda) = y^{''} - 8\lambda y^{'} + 12\lambda^2 y$
$U_1(y, \lambda) = 2y^{'}(0) + 2\lambda y(0) + 1y^{'}(1) + 3\lambda y(1) = 0$
$U_2(y, \lambda) = 2y^{'}(0) + 2\lambda y(0) + 7y^{'}(1) + 9\lambda y(1) = 0$
Результат выполнения программы:

```
Вывод - diploma (run)
run:
Введите p1:-8
Введите p2:12
Введите alpha:
alpha[1][1]=2
alpha[1][2]=2
alpha[2][1]=2
alpha[2][2]=2
Введите betha:
betha[1][1]=1
betha[1][2]=3
betha[2][1]=7
betha[2][2]=9
Вывод v:
6,000    14,000
6,000    14,000
Вывод w:
5,000    9,000
23,000   51,000
Данный пример не походит под условия теорем.
СБОРКА УСПЕШНО ЗАВЕРШЕНА (общее время: 15 секунды)
```

2) $\quad l(y,\lambda) = y'' - 8\lambda y' + 12\lambda^2 y$

$U_1(y,\lambda) = 2y'(0) + 4\lambda y(0) = 0$

$U_2(y,\lambda) = 2y'(0) + 2\lambda y(0) + y'(1) - 6\lambda y(1) = 0$

Результат выполнения программы:

```
Вывод - diploma (run)
run:
Введите p1:-8
Введите p2:12
Введите alpha:
alpha[1][1]=2
alpha[1][2]=4
alpha[2][1]=2
alpha[2][2]=2
Введите betha:
betha[1][1]=0
betha[1][2]=0
betha[2][1]=1
betha[2][2]=-6
Система однократно полна на [0,sigma], где sigma <=1.0
СБОРКА УСПЕШНО ЗАВЕРШЕНА (общее время: 18 секунды)
```

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе рассмотрен вопрос нахождения условий на коэффициенты пучка $L_0(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота. Изучен частный случай, когда эти условия неприменимы. Для этого случая теорема полноты также получена и на основании ее условий написана программа на языке программирования Java, отражающая результаты выполнения этих условий.