Министерство образования и науки РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных
уравнений и прикладной математики

Суммируемость по Риссу спектральных разложений оператора дифференцирования

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы направления 01.03.02 –
Прикладная математика и информатика

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Кирюшиной Юлии Алексеевны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ____________ А.П. Гуревич
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Зав.кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________ А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение

Одним из важных вопросов в спектральной теории дифференциальных операторов является изучение поведения обощенных средних Рисса ряда по собственным функциям рассматриваемого оператора. Для дифференциальных операторов с регулярными краевыми условиями известен следующий результат, принадлежащий Биркгофу: всякая функция из области определения дифференциального оператора разлагается в ряд Фурье по с. п. ф., сходящийся равномерно на [0,1]. Далее для оператора $y\prime$ с размазанным граничным условием $U(y) = \int\limits_0^1 y(x)d\sigma(x) = 0$, где $\sigma(x)-$ функция ограниченной вариации со скачками в точках 0 и 1. В дальнейшем этот результат переносился на более сложные случаи поведения $\sigma(x)$ и на случай произвольных дифференциальных операторов с регулярными краевыми условиями.

Данная работа основана на работе А.П. Гуревича и А. П. Хромова "О суммируемости по Риссу разложений по собственным функциям интегральных операторов в пространстве $C^\alpha[0,1]$" для другого класса операторов.

В нашем случае рассматривается поведение обобщенных средних Рисса ряда по собственным функциям оператора дифференцирования первого порядка и имеющего следующий вид:

$$Ly = y'(x)\ , x \in [0,1], y(x) \in C^1[0,1] \tag{1}$$

с интегральным условием

$$\int_0^1 \varphi(t)y(t)dt = 0, \tag{2}$$

где функция $\phi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$\varphi(0) \in C^2[0,1], \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = b \neq 0$

(Не теряя общности, b можно принять равным 1, так как условие (2) будет верно и для $\frac{\varphi(t)}{b}$)

$\varphi'(0) = a \neq 0, \quad \varphi'(1) = c.$

Примером такой функции является $\varphi(x) = x$.

Рассматриваются обобщенные средние Рисса вида

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r)R_\lambda f d\lambda,$$

где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ - резольвента оператора L, E - единичный оператор, λ - спектральный параметр. Функция $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \leq r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом r > 0;

2) при фиксированном λ выполняется условие $\lim\limits_{r\to\infty} g(\lambda, r) = 1$

3) существует такая константа $C > 0$, что $|g(\lambda, r)| \leq C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \leq r$;

4) существует $\gamma > 0$ такое, что $g(re^{i\phi}, r) = O(|\phi \pm \frac{\pi}{2}|^{\gamma})$.

Классические средние Рисса получаются, если в качестве $g(\lambda, r)$ берется функция $(1 - \frac{\lambda^4}{r^4})^{\gamma}$, которая, очевидно, удовлетворяет перечисленным условиям. Сходимость средних при таком выборе функции $g(\lambda, r)$ исследовалась М. Стоуном, который установил равносуммируемость таких средних и средних для тригонометрических рядов Фурье на каждом отрезке [a,b] из (0,1).

Основная задача данной работы заключается в нахождении достаточных условий на $f(x)$, при выполнении которых указанные выше средние Рисса сходятся к $f(x)$ в пространстве C[0,1].

Помимо этого доказывается, что средние Рисса при $\gamma \geq 1$ для любой $f(x) \in C[0,1]$ сходятся к $f(x)$ в пространстве $C[h, 1-h]$, где $0 < h < 1/2$.

Работа состоит из шести основных глав:

—Представление резольвенты $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$;

—Оценка снизу характеристического определителя при больших значениях $|\lambda|$.;

—Необходимое условие для сходимости средних Рисса;

—Асимптотика слагаемых в формуле остаточного члена при больших значениях $|\lambda|$;

—Основная теорема, в которой дается описание класса функций $f(x)$, для которых обобщенные средние Рисса сходятся к $f(x)$ по норме пространства $C[0,1]$, при этом был рассмотрен лишь частный случай, когда $\varphi(x) = x$;

—Теорема о сходимости средних Рисса внутри основного отрезка.

Основное содержание работы

Первая глава работы содержит следующую лемму, в которой получено важное для дальнейшего представление для резольвенты R_λ оператора L задачи (1) - (2).

Лемма 1. *Имеют место следующие формулы:*

$$R_\lambda f = \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \int\limits_0^1 \Delta(t,\lambda) f(t)dt + \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)dt, Re\lambda \leq 0, \qquad (3)$$

$$R_\lambda f = \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \int\limits_0^1 (\Delta(\lambda) - \Delta(t,\lambda)) f(t)dt - \int\limits_x^1 e^{\lambda(x-t)} f(t)dt, Re\lambda \geq 0, \qquad (4)$$

где $\Delta(x,\lambda) = \lambda^2 \int\limits_x^1 \phi(t) e^{\lambda t} dt$, $\Delta(0,\lambda) = \Delta(\lambda)$.

Вторая глава посвящена оценке снизу характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, на некоторой последовательности контуров, расположенных в λ — плоскости. Для этого был рассмотрен случай $Re\lambda \leq 0$. и найден образ левой полуплоскости при отображении $z = \lambda + ln(\lambda - c)$ при $|\lambda|$ достаточно больших.

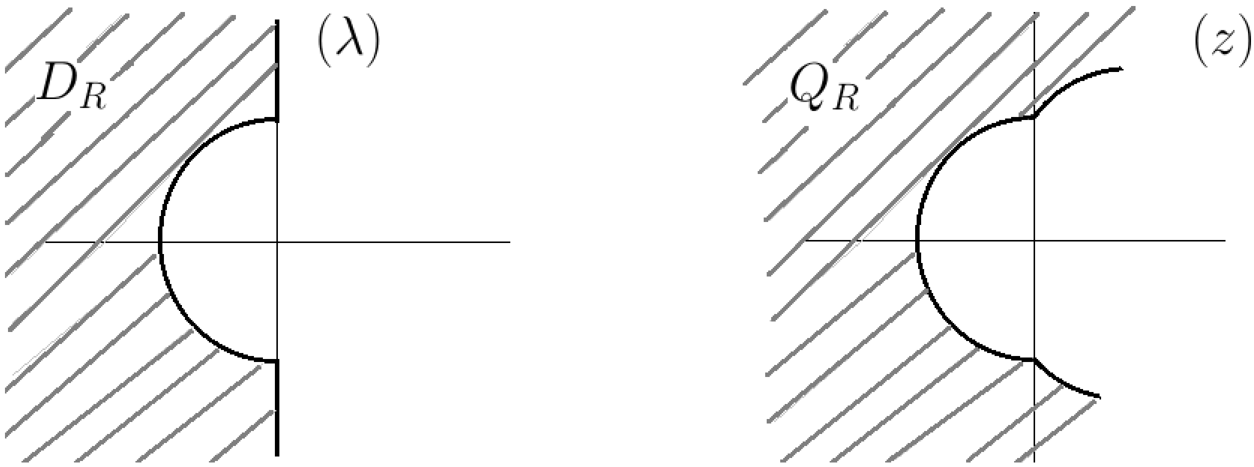

Рисунок 1

Теорема 1. *При указанном выше отображении множество* $D_R := \{z|Rez \leq 0, |z| \geq R\}$ *преобразуется в область, границей которой является линия, обладающая следующими свойствами:*

$$Rez(i\omega) \to +\infty \ Imz(i\omega) \to +\infty \text{ при } \omega \to +\infty,$$

$$Rez(i\omega) \to +\infty \ Imz(i\omega) \to -\infty \text{ при } \omega \to -\infty,$$

то есть отображение $z = \lambda + ln(\lambda - c)$ *переведет область* D_R *в область* Q_R *(см. рисунок 1).*

В этой главе доказаны леммы и теоремы, приведенные ниже.

Теорема 2. *Существует* $K > 0$*, такое что, для любого* $\varepsilon > 0$ *верно следующее:*

$$|\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\xi}{\xi}| \leq \varepsilon K|\lambda - \lambda_0|. \tag{5}$$

Лемма 2. *При* λ *достаточно больших по модулю и* $Re\lambda \leq 0$ *отображение* $z = \lambda + ln(\lambda - c)$ *является взаимно однозначным.*

Лемма 3. *Пусть* $z = \lambda + ln(\lambda - c)$*. Тогда при* z *достаточно больших по модулю и принадлежащих* Q_R *обратное отображение допускает асимптотическое представление* $\lambda = z - lnz + o(1)$*.*

Введем обозначения: Через S_δ обозначим комплексную λ - плоскость, из которой удалены все δ - окрестности собственных значений оператора L, где $\delta > 0$ и достаточно мало. Пусть, далее, Γ_r - окружность $|\lambda| = r$. Всюду в дальнейшем будем предролагать, что r берется таким образом, что $\Gamma_r \subset S_\delta$. Представим Γ_r в виде $\Gamma_r = \Gamma_r^- \cup \Gamma_r^+$, где $\Gamma_r^- (\Gamma_r^+)$ есть полуокружность, на которой $\operatorname{Re}\lambda \le 0 (\operatorname{Re}\lambda \ge 0)$.

Лемма 4. *При $|\lambda|$ достаточно больших и λ принадлежащих области S_δ справедливы оценки:*

$$\Delta^{-1} = O\big(\tfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda}\big) \text{ при } \lambda \in \Gamma_r^+,$$

$$\Delta^{-1} = O(1) \text{ при } \lambda \in \Gamma_r^- \text{ и } -r_0 \le \operatorname{Re} z \le r_0,$$

$$\Delta^{-1} = O(e^{-\lambda}) \text{ при } \lambda \in \Gamma_r^- \text{ и } \operatorname{Re} z \ge r_0,$$

где r_0 некоторое положительное число.

Лемма 5. *Для того, чтобы обобщенные средние Рисса ряда по собственным функциям оператора L сходились к $f(x)$ в $C[0,1]$ необходимо, чтобы функция $f(x) \in C[0,1]$ удовлетворяла условиям:*

1) $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t) f(t) dt = 0,$

2) $\displaystyle f(1) - \int_0^1 \varphi'(t) f(t) dt = 0.$

Лемма 6. *Справедлива формула*

$$\Omega(f,r) = f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} g(\lambda,r) R_\lambda f d\lambda =$$
$$f(x)(1 - g(0,r)) + g(0,r)(f(x) - f_0(x)) + J_{1_r} + J_{2_r}, \tag{6}$$

где

$$J_{1_r} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{g(\lambda,r)}{\lambda} R_\lambda f_1 d\lambda;$$

$$J_{2_r} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} g(\lambda,r) R_\lambda (f - f_0) f d\lambda, f_1(x) = f_0'(x).$$

$f_0(x) \in C^1[0,1]$ *и удовлетворяет (2).*

Последующие разделы посвящены получению достаточных условий на $f(x)$, при выполнении которых обобщенные средние Рисса этой функции сходятся к $f(x)$ в пространствах $C[0,1], \quad C[h,1-h]$, где $0<h<\frac{1}{2}$. Для упрощения выкладок ограничимся частным случаем, когда $\varphi(x)=x$. Очевидно, данная функция удовлетворяет требованиям, накладываемых на $\varphi(x)$.

В дальнейшем при оценке правой части формулы (6) важную роль будет играть выбор функции $f_0(x)$, который связан с использованием следующего утверждения.

Лемма 7. *Предположим, что $f(x)$ удовлетворяет условиям:*

а) $f(x) \in C[0,1] \cap C^1[1-h,1] \quad (0<h<1)$;

б) $\int\limits_0^1 t f(t) dt = 0$;

в) $f(1) - \int\limits_0^1 f(t) dt = 0$;

г) $f'(1) - f(1) + f(0) = 0$.

Тогда существует последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in C^1[0,1]$ такая, что выполнены условия:

1) $\int\limits_0^1 t f_n(t) dt = 0$;

2) $f_n(1) - \int\limits_0^1 f_n(t) dt = 0$;

3) $f_n'(1) - f_n(1) + f_n(0) = o_n(1)$, *где* $o_n(1) \to 0$ *при* $n \to \infty$;

4) $f_n(x) \in C^2[0,1-h]$;

5) $f_n(x) \in C^2[1-h,1]$;

6) $f_n(x) \to f(x)$ *в пространстве* $C[0,1]$;

7) $f_n'(x) \to f'(x)$ *в* $C[1-h,1]$.

Лемма 8. *Если* $f_0(x) \in C^1[0,1]$ *и удовлетворяет условиям:*

а)$f_0(1) - \int_0^1 f_0(t)dt = 0,$

б)$f_0(x) \in C^2[0, 1-h],$

в)$f_0(x) \in C^2[1-h, 1], (0 < h < 1);$

то при $Re\lambda \leq 0$ *и* $|\lambda| \to \infty$ *имеет асимптотическое представление*

$$J(\lambda) = \int\limits_0^1 \Big[(1-\lambda)e^{\lambda(1-t)} + \lambda t - 1\Big] f_0'(t)dt) =$$

$$= f_0'(1) - f_0(1) + f_0(0) + O(e^\lambda) + o(1). \qquad (7)$$

Для нахождения оценки формулы (6) были использованы леммы, приведенные ниже.

Введем обозначение. Обозначим через Q_h множество функций $f(x) \in C[0,1]$, которые удовлетворяют условиям:

1) $\int\limits_0^1 tf(t)dt = 0,$

2)$f(1) - \int\limits_0^1 f(t)dt = 0,$

3)$f(x) \in C^1[1-h, 1].$

Лемма 9. *Если* $f(x) \in Q_h$, *то при* $\lambda \in \Gamma_r^-$

$$R_\lambda(f) = O\bigg(\lambda e^{-\xi(h)} \parallel f \parallel \bigg) + O\bigg(\frac{1}{h} \parallel f \parallel \bigg) +$$

$$+ O\bigg(\frac{e^\xi - 1}{\xi} \parallel f' \parallel_h \bigg) + O\bigg(\frac{e^\xi - 1}{\xi} \parallel f \parallel \bigg). \qquad (8)$$

Лемма 10. *Если* $f_0(x)$ *удовлетворяет условиям леммы 8, то при* $\lambda \in \Gamma_r^+$ *справедлива оценка* $R_\lambda f_0'(x) = O\Big(\dfrac{1}{\lambda}\Big).$

Лемма 11. *Если* $f(x) \in Q_h$, *то при* $\lambda \in \Gamma_r^+$

$$R_\lambda f(x) = O\big(\frac{1}{\lambda} \parallel f \parallel \big) + O\big(\chi(\lambda) \parallel f \parallel \big),$$

где

$$\chi(\lambda) = \frac{1 - e^{\operatorname{Re}\lambda}}{-\operatorname{Re}\lambda}.$$

Лемма 12. *Если $M(x, \lambda)$ равномерно ограничена при $x \in [h, 1-h]$ и любых λ, для которых $Re\lambda \leq 0$, то*

$$\int\limits_{\Gamma_r^-} \lambda^k g(\lambda, r) M(x, \lambda) e^{\lambda x} d\lambda = O(r^{k-\gamma}).$$

Лемма 13. *Справедлива оценка*

$$\int\limits_{\Gamma_r^-} |g(\lambda, r)||\chi(\lambda)||d\lambda| = O(1).$$

Лемма 14. *Если $f_0(x)$ удовлетворяет условиям леммы 8, то при $\lambda \in \Gamma_r^-$ и $\gamma \geq 1$ справедливо асимптотическое представление*

$$J_{1r}^- = (f_0'(1) - f_0(1) + f_0(0)) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r^-} \frac{g(\lambda, r)}{\lambda} d\lambda + o(1). \tag{9}$$

Лемма 15. *Если $f(x) \in Q_h$, то при $\gamma \geq 1$*

$$J_{2r}^- = O(\| f \|) + O(\| f' \|_h). \tag{10}$$

Лемма 16. *Если $f_0(x)$ удовлетворяет условиям леммы 8, то $J_{1r}^+ = O(\frac{1}{\lambda})$.*

Лемма 17. *Если $f(x) \in Q_h$, то при $\gamma \geq 1$ справедлива оценка $J_{2r}^+ = O(\| f \|)$.*

Итогом работы является доказательство следующих двух теорем.

Теорема 3. *Предположим, что* $f(x) \in Q_h$ *и удовлетворяет условию* $f'(1) - f(1) + f(0) = 0$, *тогда при* $\gamma \geq 1$

$$\lim_{r\to\infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda \right\|_{C[0,1]} = 0.$$

Теорема 4. *Для любой* $f(x) \in C[0,1]$ *и* $\gamma \geq 1$ *выполняется*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda \right\|_{C[h,1-h]} = 0.$$

Для доказательства последней теоремы при $x \in [h, 1-h] \quad (0 < h < 1/2)$ была рассмотрена задача:

$$y' - \lambda y = f(x), \tag{11}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{12}$$

Обозначим через R_λ^0 резольвенту (15)-(16) и рассмотрим обобщенные средние Рисса $-\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\Gamma_r} g(\lambda, r) R_\lambda^0 f d\lambda$

Лемма 18. *Для любой* $f(x) \in C[0,1]$ *и произвольного* h, $(0 < h < 1/2)$

$$\lim_{r\to\infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r} g(\lambda, r) R_\lambda^0 f d\lambda \right\|_{C[h,1-h]} = 0.$$

Заключение

В процессе выполнения работы был рассмотрен оператор дифференцирования

$$Ly = y'(x), x \in [0,1], y(x) \in C^1[0,1]$$

с интегральным условием

$$\int\limits_0^1 \varphi(t)y(t)dt = 0$$

и обобщенные средние Рисса в виде

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r)R_\lambda f d\lambda,$$

где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ - резольвента оператора L, E - единичный оператор, λ - спектральный параметр.

Если в качестве $g(\lambda, r)$ взять функцию вида $(1 - \frac{\lambda^4}{r^4})^\gamma$ (где γ - некоторое положительное число), которая, очевидно, удовлетворяет условиям (1)-(2), то мы получим классические средние Рисса.

Отличительной особенностью рассматриваемого оператора является наличие у его резольвенты R_λ степенного роста по спектральнному параметру λ.

В связи с этим обстоятельством класс функций, для которых средние Рисса сходятся равномерно к $f(x)$ в пространстве $C[0,1]$, при выполнении достаточных условий, которые были найдены, сужается за счет дополнительных требований, накладываемых на $f(x)$. Приведенный в работе пример показывает, что от дополнительных требований отказаться нельзя.

Помимо этого было доказано, что средние Рисса при $\gamma \geq 1$ для любой $f(x) \in C[0,1]$ сходятся к $f(x)$ в пространстве $C[h, 1-h]$, где $0 < h < 1/2$.